

Nº 9

Modelos de crecimiento económico y dinámicas complejas

María José Roa García, Dulce Saura Bacaicoa
y Francisco José Vázquez Hernández

AVANCES DE INVESTIGACIÓN

Nº 9 # *MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO Y DINÁMICAS COMPLEJAS*

Autores:

- María José ROA GARCÍA, Universidad Francisco de Vitoria. Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales «Francisco de Vitoria»
- Dulce SAURA BACAICOA, Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza. Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales «Francisco de Vitoria»
- Francisco José VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Autónoma de Madrid. Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales «Francisco de Vitoria».

ISBN: 84-89552-32-0

© María José Roa García, Dulce Saura Bacaicoa y Francisco José Vázquez Hernández,
2004

© Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales «Francisco de Vitoria», 2004

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo reside en mostrar cómo la introducción de no linealidades permite explicar fenómenos económicos no explicados por la modelización lineal, que los considera resultado de perturbaciones exógenas e inexplicables. Para ello, en concreto, vamos a analizar cómo afecta la consideración de no linealidades en la relaciones de las variables económicas al comportamiento dinámico de los modelos de crecimiento tradicionales.

Aunque los modelos de crecimiento tradicionales son no lineales, la forma funcional que se considera para las tasas de crecimiento de las variables que determinan el crecimiento de la economía es en última instancia lineal. Las razones por las que se han utilizado tan frecuentemente los sistemas dinámicos lineales (que generan comportamientos cualitativos muy limitados: básicamente convergencia o divergencia a un punto de equilibrio o a un ciclo periódico) son varias. Por un lado tenemos el paradigma neoclásico del equilibrio económico y toda la literatura a la que ha dado lugar. Bajo este paradigma, el mercado aparece como un mecanismo de estabilización y la economía en el largo plazo converge al equilibrio. Esto dio lugar a que la mayoría de los trabajos se centrasen en buscar las condiciones necesarias para garantizar la convergencia y estabilidad de dicho equilibrio. Así las cosas, la dinámica simple se ajustaba al tipo de comportamiento dinámico que buscaba la teoría neoclásica. Sin embargo, este tipo de modelización se encontró con un problema: no parecía reflejar el comportamiento irregular y complicado que se observa en las series económicas. La nueva economía clásica solucionó este problema introduciendo perturbaciones exógenas estocásticas. El origen de las fluctuaciones e irregularidades vendría dado por shocks exógenos que afectan a las variables fundamentales de la economía, de tal forma que en ausencia de tales perturbaciones el sistema económico converge al equilibrio (es decir, el sistema es endógenamente estable).

A pesar de que la modelización lineal y las dinámicas simples han sido predomi-

nantes en economía, desde el punto de vista teórico, el hecho de que las fluctuaciones económicas fuesen resultado de shocks exógenos no convencía a muchos autores. De este descontento surge, en la década de los ochenta, toda una serie de trabajos que tratan de demostrar la naturaleza endógena de las fluctuaciones económicas¹: en ausencia de shocks exógenos la dinámica interna no lineal de la economía es capaz de generar comportamientos tan complejos que pueden parecer generados aleatoriamente. La naturaleza endógena de las fluctuaciones implica en términos matemáticos la consideración de no linealidades y, como es bien conocido, su introducción puede conllevar un cambio notable en los comportamientos dinámicos de las variables modelizadas pues uno de los posibles comportamientos que genera la introducción de no linealidades es el comportamiento caótico. Las dinámicas no lineales caóticas muestran cómo un sistema determinista extremadamente simple es capaz de generar trayectorias dinámicas de gran complejidad con apariencia puramente aleatoria. En concreto, la evolución temporal de las variables puede ser extremadamente compleja, incluso errática, reflejando entonces de una manera más precisa el tipo de comportamientos observados en la realidad. Si esto es así, ya no sería necesaria la introducción de perturbaciones estocásticas para modelizar las irregularidades que observamos en dichas series; las irregularidades son explicadas por la propia dinámica interna del modelo.

En resumen, en la medida que la introducción de no linealidades pueda explicar la existencia de fluctuaciones irregulares –no explicadas por la modelización lineal al suponer que son resultado de shocks exógenos–, cabe esperar que la aplicación de los sistemas dinámicos no lineales en la teoría económica pueda enriquecer y completar los trabajos que tratan de explicar el origen y la naturaleza de los ciclos. Una de

¹La idea de la naturaleza endógena de las fluctuaciones no era nueva; en los años cuarenta y cincuenta autores de la talla de Hicks, Kaldor y Goodwin desarrollaron modelos no lineales con el objetivo de demostrar dicha hipótesis. Sin embargo, a partir de los años sesenta este tipo de modelización se abandonó en favor de la modelización lineal con shocks estocásticos. La razón principal era que estos primeros modelos carecían de una base microeconómica sólida en términos del comportamiento optimizador de los agentes.

las áreas económicas donde se ha estudiado con mayor profusión la introducción de no linealidades en las relaciones económicas y la posibilidad de obtener dinámicas complejas es la teoría del crecimiento económico. Los modelos de crecimiento tradicionales, en general, no se han ocupado de estudiar las fluctuaciones irregulares a lo largo de la tendencia del crecimiento sostenido, limitándose al estudio de esta última. Como veremos, la introducción de no linealidades permite analizar ambos fenómenos, el crecimiento y los ciclos de forma conjunta.

Para cumplir con nuestro objetivo el trabajo se divide en dos partes. En la primera parte, vamos a introducir de forma sencilla la teoría de los sistemas dinámicos no lineales y caóticos. Para ello, en primer lugar, introducimos una serie de conceptos previos en relación a los sistemas dinámicos no lineales. A continuación analizaremos un concepto que tiene especial importancia en teoría económica, el de bifurcación. El concepto de bifurcación se emplea para describir cambios significativos en el comportamiento cualitativo del sistema ante pequeñas variaciones de los parámetros. Llegados a este punto presentaremos las características propias de los sistemas caóticos, para lo cual utilizaremos un ejemplo de sistema dinámico muy sencillo, la ecuación logística.

En la segunda parte repasamos los principales modelos de crecimiento donde se ha analizado el efecto de la consideración de no linealidades en la modelización de algunas variables económicas y la posibilidad de que se generen dinámicas caóticas. En general podemos considerar la existencia de cinco tipos de modelos donde se ha llevado a cabo este análisis: modelo de Solow, modelos de crecimiento óptimo exógeno, modelos de generaciones sucesivas, modelo de Goodwin y modelos de crecimiento óptimo endógeno.

1 Introducción a la teoría del caos

1.1 Conceptos básicos

En esta sección pretendemos introducir los conceptos básicos necesarios para el estudio de los sistemas caóticos, centrándonos en los que más se han utilizado en Teoría Económica. Nuestro objetivo no es realizar un estudio detallado y profundo de la teoría del caos, sino, de manera sencilla aunque rigurosa, presentar los instrumentos necesarios para seguir sin mucha dificultad la segunda parte de este trabajo, donde aparecen conceptos relacionados con esta teoría.

Los modelos de crecimiento en general analizan la evolución de las tasas de crecimiento de las variables económicas y los factores que las determinan. El estudio de los procesos que evolucionan en el tiempo se lleva a cabo mediante la denominada teoría de los sistemas dinámicos. Por las razones expuestas en la introducción estos sistemas han sido tradicionalmente lineales. En esta sección nos vamos a ocupar de los no lineales.

Los sistemas dinámicos pueden ser de dos tipos: discretos o continuos. Un sistema dinámico discreto viene dado por²:

$$x_t = f(x_{t-1}), \quad (1.1)$$

donde t representa el tiempo medido a intervalos regulares y $f : X \rightarrow X$ es una función que suponemos continua definida en cierto subconjunto abierto de $X \subset \mathbb{R}^n$. X recibe el nombre de espacio de fases o de los estados. $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)$ es el vector de estado en el instante t y está formado por las variables de estado del sistema. En (1.1) la función f transforma cada estado en el siguiente, determinando

²Esta es la expresión general de una ecuación en diferencias autónoma, es decir, en la que f no depende explícitamente de t . La expresión general de una ecuación en diferencias es $x_t = f(t, x_{t-1})$. Nosotros nos centraremos en los sistemas autónomos pues son los habituales en las aplicaciones; además, tienen interpretaciones geométricas muy elocuentes.

la ley de evolución del sistema dinámico³. El sistema dinámico es lineal si f es lineal. Si conocemos el estado inicial x_0 podemos reconstruir toda la evolución del sistema: x_0, x_1, x_2, \dots . Esta se obtiene de forma recursiva como:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \dots$$

que en términos generales equivale a:

$$x_t = f^t(x_0)$$

La expresión anterior se denomina solución general del sistema y nos permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de x_0 . La sucesión:

$$\gamma(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\} = \bigcup_{t \geq 0} f^t(x_0) \quad (1.2)$$

se llama órbita con dato inicial x_0 . Como veremos, las órbitas de un sistema no lineal pueden llegar a ser muy complejas. Nosotros por ahora vamos a introducir tres de tipos de órbitas, claves en el estudio de los sistemas dinámicos.

1. *Puntos fijos o de equilibrio.* x^* es un punto fijo de (1.1) si $f(x^*) = x^*$. Los puntos fijos son puntos de equilibrio; una vez que el sistema entra en ellos evoluciona de forma constante en el tiempo. La órbita de un punto fijo es la secuencia constante x^*, x^*, x^*, \dots , esto es, $\gamma(x^*) = \{x^*\}$.
2. *Puntos periódicos.* x^* es un punto periódico del sistema (1.1) si existe un $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$ tal que $f^i(x^*) = x^*$. Los puntos periódicos son equilibrios cíclicos que regresan a sí mismos después de i iteraciones. El mínimo entero k tal que

³El sistema (1.1) sólo tiene memoria de un período (orden 1). En principio, una ecuación en diferencias puede tener más memoria, esto es, que x_t dependa de varios estados pasados $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$; sin embargo, sencillos cambios de variable permiten expresarla de la forma dada en (1.1).

$f^k(x^*) = x^*$ se llama orden del punto periódico. Si x^* es cíclico de orden i , x^* es un punto fijo para $g = f^i$. En este caso, la órbita está formada por un conjunto finito de puntos: $\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{i-1}(x^*)\}$.

3. *Puntos eventualmente fijos o eventualmente periódicos.* Es el caso en el que x^* no es ni punto fijo ni periódico, pero algún punto de la órbita de x^* es fijo o periódico.

Un sistema dinámico continuo viene dado por una ecuación diferencial⁴:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.3)$$

donde t es una variable continua y ahora $f : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial definido en cierta región abierta W de \mathbb{R}^n , que determina la dirección y la velocidad del movimiento. En cada instante el ritmo de variación de cada variable de estado está determinado por los valores que tomen ellas y las demás variables. Mediante los teoremas fundamentales de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden se puede demostrar que una ecuación de la forma (1.3) tiene una única solución local que satisface las condiciones iniciales dadas, suponiendo que f admite derivadas parciales continuas de primer orden. De forma precisa, la solución de la ecuación (1.3) con condición inicial $x(0) = x_0$, es una función vectorial $x(t, x_0) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo abierto I tal que:

$$\frac{dx(t, x_0)}{dt} = f(x(t, x_0)), \quad \forall t \in I \quad (1.4)$$

Geoméricamente, la función solución es una curva en \mathbb{R}^n y el sistema (1.3)

⁴Se tienen aquí análogos comentarios a los efectuados para ecuaciones en diferencias en las notas 1 y 2.

determina el vector tangente en cada punto de la curva. La aplicación:

$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\rightarrow \phi_t(x_0) = x(t, x_0)\end{aligned}$$

se denomina flujo generado por el sistema dinámico, y permite determinar la evolución de cualquier conjunto de condiciones iniciales.

Llamamos órbita de $x_0 \in X$ a la curva que recorre la única solución $x(t, x_0)$ con dato inicial⁵ $x(0) = x_0$:

$$\gamma(x_0) = \{\phi_t(x_0), t \in I\} = \bigcup_{t \in I} \phi_t(x_0) \quad (1.5)$$

En tiempo continuo se definen, de manera análoga al caso discreto, los puntos de equilibrio y las órbitas periódicas. x^* es un punto fijo o de equilibrio de (1.4) si $f(x^*) = 0$. Por otro lado, x^* es un punto periódico de (1.4) si existe un $T \neq 0$ tal que $\phi_T(x^*) = x^*$. La órbita de un punto periódico es una curva cerrada simple.

Para mostrar los conceptos básicos de la teoría del caos vamos a utilizar los sistemas dinámicos discretos. En la medida que lo que pretendemos mostrar no difiere sustancialmente en uno u otro sistema, por sencillez nos limitaremos al caso discreto y haremos referencia al caso continuo cuando sea necesario. Basta notar que, mientras que un sistema unidimensional en tiempo discreto puede generar dinámica caótica, en tiempo continuo es necesario, como mínimo, que el sistema tenga dimensión tres para generar dicha dinámica, lo que dificulta notablemente el tratamiento analítico.

⁵No es lo mismo recorrerla en un sentido que en el opuesto. Así, se define órbita positiva como $\gamma^+(x_0) = \{x(t, x_0), t \in I, t \geq 0\}$ (estados en el futuro) y órbita negativa como $\gamma^-(x_0) = \{x(t, x_0), t \in I, t \leq 0\}$ (estados pasados).

Estabilidad

A continuación vamos a introducir los diferentes conceptos de estabilidad de una órbita de un sistema discreto. Como en la práctica es imposible saber con exactitud el valor inicial x_0 del que parte la órbita $\gamma(x_0)$, es importante analizar si nos alejamos o acercamos a $\gamma(x_0)$ si partimos de un dato inicial \tilde{x}_0 próximo a x_0 , es decir, si esta órbita es “alcanzable” en la práctica.

Definición 1 (*Estabilidad local en sentido de Lyapunov*)

- (a) $\gamma(x_0)$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo \tilde{x}_0 con $d(\tilde{x}_0, x_0) = |\tilde{x}_0 - x_0| \leq \delta$ se tiene que $d(f^t(\tilde{x}_0), f^t(x_0)) = |f^t(\tilde{x}_0) - f^t(x_0)| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
- (b) $\gamma(x_0)$ es asintóticamente estable si es estable y si además existe un $\tilde{\delta} > 0$ tal que para todo $|\tilde{x}_0 - x_0| \leq \tilde{\delta}$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} |f^t(\tilde{x}_0) - f^t(x_0)| = 0$.
- (c) $\gamma(x_0)$ es inestable si no es estable.

Casos particulares especialmente interesantes son los correspondientes a la estabilidad de puntos de equilibrio y de órbitas periódicas. Si $x_0 = x^*$ es un punto de equilibrio, entonces mediante el desarrollo de Taylor de primer orden:

$$f(\tilde{x}_0) - f(x_0) = f(\tilde{x}_0) - x^* \approx Jf(x^*)(\tilde{x}_0 - x^*)$$

de donde se deduce que si todos los autovalores de la matriz jacobiana $Jf(x^*)$ tienen módulo menor que uno, el equilibrio es asintóticamente estable mientras que si existe un autovalor con módulo mayor que uno, x^* será inestable. Para el caso unidimensional, este estudio queda de la siguiente forma: si $|f'(x^*)| < 1$, x^* es asintóticamente estable y si $|f'(x^*)| > 1$, x^* es inestable.

Si $x_0 = x^*$ es un punto periódico de orden k , entonces x^* es un punto fijo de $g = f^k$ y se tienen análogas conclusiones a las establecidas en el caso anterior.

El método de linealización, sin embargo, no permite determinar la estabilidad cuando un autovalor tiene modulo uno ($|f'(x^*)| = 1$ para el caso unidimensional). En esta situación es útil el siguiente resultado:

Teorema 1 (*Lyapunov, 1949*) Sea x^* un punto fijo de f y $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua definida en un abierto U , $x^* \in U$ tal que:

a) $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \in U - \{x^*\}$

b) $V(f(x)) - V(x) \leq 0$, $x \in U - \{x^*\}$ (*función de Lyapunov no estricta*)

entonces x^* es estable.

Si la condición b) se cambia por:

c) $V(f(x)) - V(x) < 0$, $x \in U - \{x^*\}$ (*función de Lyapunov estricta*)

entonces x^* es asintóticamente estable.

La condición a) implica que la función V tenga un mínimo en el punto de equilibrio, b) que V no aumente a lo largo de las órbitas y c) que V disminuya, es decir, que las órbitas inicialmente cercanas se acerquen al punto de equilibrio.

El estudio cualitativo del comportamiento a largo plazo de un sistema permite extraer interesantes propiedades sobre su evolución temporal. Ya hemos señalado el interés de los economistas por los procesos que evolucionan en el tiempo. Si somos capaces de obtener resultados sobre el comportamiento a largo plazo de estos procesos quizás podamos avanzar en la resolución de cuestiones de teoría económica que, o se han resuelto de forma insatisfactoria o no están resueltas. En relación al comportamiento a largo plazo del sistema aparece el concepto de *atractor*. De manera intuitiva, se denomina atractor del sistema al conjunto de puntos a los cuales una órbita arbitraria del sistema converge. El atractor del sistema puede ser un punto fijo o una órbita periódica, pero en general su naturaleza es arbitraria, de manera

que podemos encontrarnos con estructuras de enorme complejidad geométrica. En este sentido, los conceptos de estabilidad que hemos introducido para órbitas individuales se extienden a conjuntos más generales. En concreto para un conjunto A cerrado e invariante⁶ se definen los mismos conceptos de estabilidad con la única diferencia de que ahora la distancia se establece entre un punto y el conjunto:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

Definición 2 *Un conjunto compacto e invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina atractor si existe un entorno U de A tal que para todo $x_0 \in U$ se verifica que $f^t(x_0) \in U$, $\forall t \geq 0$ y $f^t(x_0) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

El conjunto de puntos iniciales que son atraídos por A , es decir, el mayor entorno U que cumple las propiedades enunciadas en la definición 1.2 se denomina *cuenca de atracción* de A .

Ya hemos señalado que la estructura del atractor no tiene porqué ser simple. Cuando esta estructura llega a ser extraordinariamente compleja, se denomina *atractor extraño*, del que hablaremos cuando analizemos los sistemas dinámicos caóticos.

La extensión al caso continuo de los conceptos de estabilidad y atracción, así como del teorema de Lyapunov es inmediata. En general, basta con sustituir la aplicación f^t por el flujo ϕ_t .

Para sistemas dinámicos continuos bidimensionales existe un teorema, el *Teorema de Poincaré-Bendixson*, que permite estudiar todos los posibles comportamientos a largo plazo: punto fijo, ciclo límite (el atractor es una órbita cerrada) y puntos de equilibrio y trayectorias que los unen (homoclínicas y heteroclínicas) y además, proporciona las condiciones suficientes para la existencia de ciclos límites. Debido a

⁶El conjunto A es *invariante* si $f(A) \subset A$. Así, si A es *invariante* ninguna órbita con condición inicial en el conjunto A se sale del propio conjunto A . Para el caso continuo, A es *invariante* respecto al flujo ϕ_t si $\phi_t(A) \subset A \forall t \in I$; si $\phi_t(A) \subset A$ para $t > 0$ se dice que A es *positivamente invariante*, y *negativamente invariante* cuando $\phi_t(A) \subset A$ para $t < 0$.

la dificultad del tratamiento analítico de los sistemas continuos n -dimensionales, los modelos económicos no lineales que se han desarrollado son básicamente bidimensionales. Este hecho ha provocado que dicho teorema haya sido utilizado con frecuencia en economía (Kaldor (1940), Goodwin (1967)). Por esta razón vamos a presentarlo brevemente, y para ello necesitamos definir el concepto de conjunto límite. Sea el sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, $x \in X$, donde X es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 .

Definición 3 *El conjunto ω -límite de un punto $x \in X$ es el conjunto de todos los puntos $y \in X$ con la propiedad de que existe una sucesión de puntos $t_i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(x) = y$. El conjunto α -límite se define de la misma forma pero con una sucesión de puntos $t_i \rightarrow -\infty$.*

Así pues, el conjunto ω -límite es el conjunto de puntos de acumulación de la órbita $\gamma^+(x)$. A continuación enunciamos el teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 2 (Poincaré-Bendixson) *Sea un conjunto límite compacto y no vacío de un sistema dinámico C^1 en \mathbb{R}^2 . Si el conjunto límite no contiene un punto de equilibrio, es una órbita cerrada.*

El teorema clasifica los posibles comportamientos a largo plazo de un sistema dinámico continuo. En la práctica, lo relevante del teorema es que proporciona un método para detectar la existencia de ciclos límites, ya que, a partir de él se deducen los siguientes resultados:

Corolario 3 *Si $V \subset \mathbb{R}^2$ es una región positivamente invariante, entonces contiene un punto de equilibrio. Además, si el punto de equilibrio no es ω -límite de ningún punto de V , entonces existe un ciclo límite.*

Este último resultado proporciona condiciones suficientes para la existencia de órbitas cerradas, aunque no dice nada sobre cuántas de ellas pueden existir. Una

vez que demostramos la existencia de una órbita cerrada, ésta puede ser una región positivamente invariante que contenga nuevamente otra órbita cerrada, y así sucesivamente.

Para sistemas continuos de mayor dimensión ó para sistemas discretos no existen teoremas análogos a éste. Aunque no se ha entrado en detalles técnicos, es importante notar que la demostración del teorema de *Poincaré-Bendixson* está basada en la imposibilidad de que órbitas distintas se corten, lo que limita drásticamente el comportamiento de las órbitas de sistemas dinámicos continuos bidimensionales (dadas por curvas en el plano.)

1.2 Bifurcaciones

El concepto de bifurcación se emplea para describir los cambios significativos en el comportamiento cualitativo del sistema ante pequeñas variaciones de sus parámetros. En economía, los parámetros se introducen para reflejar la influencia de diversas fuerzas exógenas. Al contrario de lo que ocurre en otras ciencias, con frecuencia es difícil asignar un valor determinado a los parámetros económicos. En consecuencia, determinar si el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico persiste ante variaciones de los parámetros es una cuestión especialmente importante en economía y a ello vamos a dedicar este apartado. Además, el concepto de bifurcación será importante en la medida que, como veremos en la siguiente sección, una posible transición al comportamiento caótico está caracterizada por la existencia de procesos de bifurcación.

Consideremos el sistema discreto unidimensional parametrizado:

$$x_t = f(x_{t-1}, r)$$

donde $r \in \mathbb{R}$ es un parámetro del modelo. Sus puntos de equilibrio vienen dados

por las soluciones de la ecuación:

$$x = f(x, r) \tag{1.6}$$

y, por tanto, dependen del valor de r . Supongamos que para $r = r_0$ existe un equilibrio x_0^* y que $\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0)$ es distinto de 1. En este caso, aplicando el teorema de la función implícita, la ecuación (1.6) define una función continua (curva de puntos fijos) $x^*(r)$ cerca de (x_0^*, r_0) . Además, si $|\lambda_0| < 1$ el equilibrio x_0^* es asintóticamente estable y si $|\lambda_0| > 1$ es inestable, características que persisten en los puntos $x^*(r)$ para r cerca de r_0 . Así pues, pequeños cambios en el valor de r no afectan cualitativamente al comportamiento del sistema en las proximidades del equilibrio.

Sin embargo, si $\lambda_0 = 1$ la ecuación (1.6) podría no definir una función $x^*(r)$ en su entorno (x_0^*, r_0) , lo que podría producir la aparición de nuevos equilibrios y la pérdida o transferencia de estabilidad. En este caso, la representación de las soluciones de (1.6) en función de r junto con sus propiedades de estabilidad (en trazo continuo los equilibrios estables y con trazo discontinuo los inestables) genera un diagrama de bifurcación (véase figura 1.1).

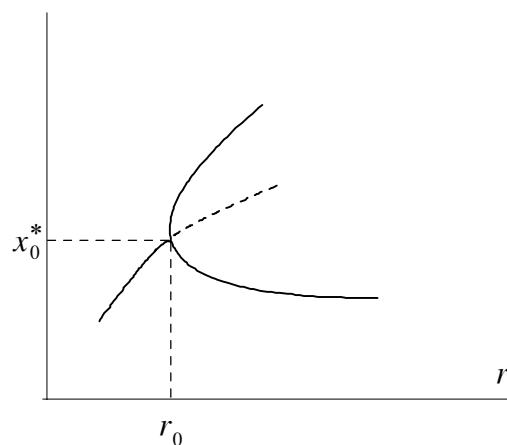


Figura 1.1.

El valor r_0 se denomina punto de bifurcación y en la figura 1.1 se observa cómo de la curva de puntos fijos $x^*(r)$ estables para $r < r_0$ e inestables para $r > r_0$, emergen para $r > r_0$, dos nuevas curvas de puntos fijos estables (bifurcación tridente).

Otras posibles situaciones cuando $\lambda_0 = 1$ se muestran en las figuras 1.2 y 1.3.

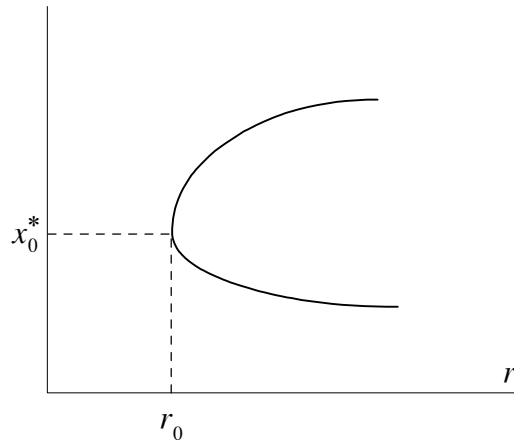


Figura 1.2.

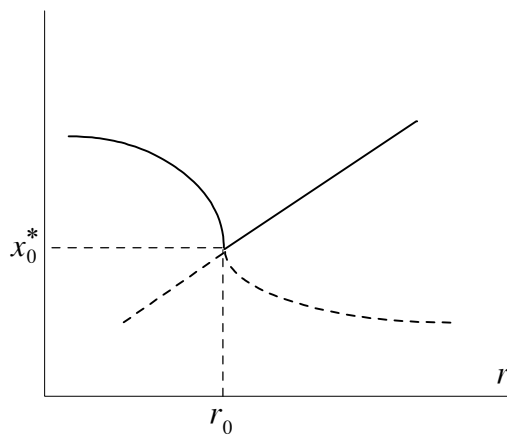


Figura 1.3.

En la figura 1.2 aparecen “de la nada” dos curvas de equilibrios estables (bifurcación tangente o de la nada), mientras que en la figura 1.3 las dos curvas transfieren su estabilidad en r_0 (bifurcación transcritical).

Cuando $\lambda_0 = -1$, aunque la ecuación (1.6) define una curva de puntos de equilibrio, la estabilidad de los mismos podría cambiar súbitamente. Por ejemplo, si

$\lambda(r) > -1$ para $r < r_0$ y $\lambda(r) < -1$ para $r = r_0$, los equilibrios $x^*(r)$ pasarían de estables a inestables. En este caso, dado que $\lambda^2(r) = 1$ para $r = r_0$, podría suceder que el sistema dado por $g = f^2$ presentara una bifurcación tridente, generando la aparición de un ciclo de período 2 tal y como se aprecia en la figura 1.4 (bifurcación de duplicación de período).

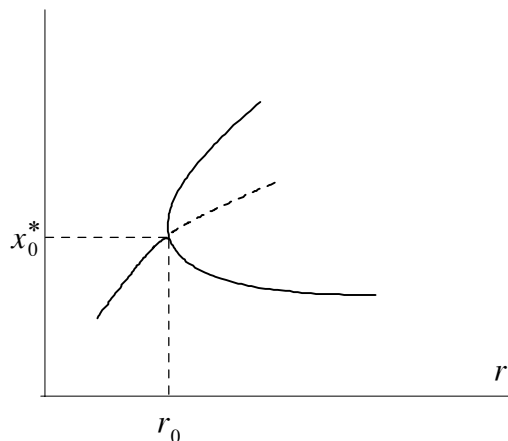


Figura 1.4.

Nótese que aunque los diagramas representados en las figuras 1.1 y 1.4 parecen semejantes, hay una diferencia fundamental. En el primero, las dos nuevas curvas que aparecen para $r > r_0$ están formadas por equilibrios; en el segundo, son los dos puntos de un ciclo de período 2.

Las condiciones que garantizan la existencia de las bifurcaciones anteriormente comentadas se recogen a continuación.

Teorema 4 (*Bifurcación tridente*) Sea la función $f(x, r)$ de clase C^3 . Si en el punto fijo (x_0^*, r_0) :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0) = \lambda_0 = 1$
2. $\frac{\partial f^3}{\partial x^3}(x_0^*, r_0) \neq 0$
3. $\frac{\partial f^2}{\partial r \partial x}(x_0^*, r_0) \neq 0$

entonces dependiendo del signo de las expresiones 2 y 3,

- i) el equilibrio (x^*, r_0) es estable (inestable) para $r < r_0$ ($r > r_0$), y
- ii) el equilibrio (x^*, r_0) se torna inestable (estable) para $r > r_0$ ($r < r_0$), y aparecen dos nuevas ramas de equilibrios estables (inestables).

Teorema 5 (Bifurcación Tangente) Sea la función $f(x, r)$ de clase C^3 . Si en el punto fijo (x_0^*, r_0) :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0) = \lambda_0 = 1$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0^*, r_0) \neq 0$
3. $\frac{\partial f}{\partial r}(x_0^*, r_0) \neq 0$

entonces dependiendo del signo de las expresiones 2 y 3,

- i) no existen equilibrios en un entorno de (x^*, r_0) para $r < r_0$ ($r > r_0$),
- ii) existen dos equilibrios en un entorno de (x^*, r_0) para $r > r_0$ ($r < r_0$)

Teorema 6 (Bifurcación Transcrítica) Sea la función $f(x, r)$ de clase C^3 . Si en el punto fijo (x_0^*, r_0) :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0) = \lambda_0 = 1$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0^*, r_0) \neq 0$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x}(x_0^*, r_0) \neq 0$

entonces dependiendo del signo de las expresiones 2 y 3,

- i) el punto fijo x^* es estable (inestable) para $r < 0$ ($r > 0$), y se torna inestable (estable) para $r > 0$ ($r < 0$)
- ii) existe una segunda rama de puntos fijos inestable (estable) para $r < 0$ ($r > 0$), que se torna estable (inestable) para $r > 0$ ($r < 0$).

Teorema 7 (*Bifurcación de duplicación de periodo*) Sea la función $f(x, r)$ de clase C^3 . Si en el punto fijo (x_0^*, r_0) se cumple:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, r_0) = \lambda_0 = -1$
2. $\frac{\partial f}{\partial r}(x_0^*, r_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0^*, r_0) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x_0^*, r_0) \neq 0$
3. $-2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0^*, r_0) - 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) (x_0^*, r_0) \neq 0$

entonces dependiendo del signo de las expresiones 2 y 3,

- i) el punto fijo x^* es estable (inestable) para $r < r_0$ ($r > r_0$), y
- ii) el punto fijo x^* se hace inestable (estable) para $r > r_0$ ($r < r_0$), y aparece una nueva rama de puntos periódicos de periodo dos estable (inestable).

Mientras que las bifurcaciones que hemos analizado pueden ocurrir en sistemas dinámicos unidimensionales, la siguiente bifurcación aparece por primera vez en sistemas de dimensión dos.

Teorema 8 (*Bifurcación Neimark-Hopf*) Sea $x_{t+1} = F(x_t, r)$, $x_t \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$, que tiene una familia de puntos fijos $x^*(r)$ en los cuales los autovalores $\lambda(r)$ son complejos conjugados. Si existe un r_0 tal que

(i) $|\lambda(r_0)| = 1$ pero $\lambda^n(r_0) \neq \pm 1$, $n = 1, 2, 3, 4$

(ii) $\left. \frac{d(|\lambda(r)|)}{dr} \right|_{r=r_0} \neq 0$

entonces para valores de r cercanos a r_0 (para $r > r_0$ ó para $r < r_0$) aparece una órbita cerrada (estable o inestable).

La bifurcación de Hopf se ilustra en la figura 1.5, siendo muy utilizada en los modelos económicos (Reichlin, 1986, Farmer, 1986; Kalra, 1996; Asea y Zak, 1999; Pintus et al., 2000; Zhang, 2000).

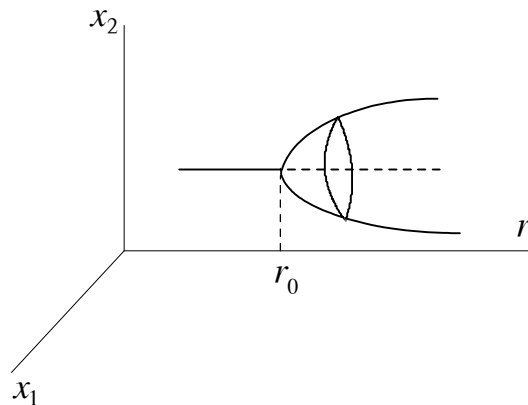


Figura 1.5.

1.3 Sistemas dinámicos caóticos unidimensionales

Una vez que hemos expuestos los conceptos básicos de los sistemas dinámicos no lineales, vamos a presentar qué es un sistema dinámico no lineal caótico. Para introducir sus propiedades características vamos a considerar un ejemplo sencillo de dinámica caótica, la ecuación logística, que viene dada por el siguiente sistema dinámico discreto unidimensional:

$$x_{t+1} = f(x_t, r) \equiv rx_t(1 - x_t), \quad x_t \in [0, 1], \quad r \in [0, 4]$$

La ecuación logística es un ejemplo de función unimodal⁷, que posee dos puntos fijos $x^* = 0$ y $x^{**} = 1 - \frac{1}{r}$. El gráfico de la función corresponde a una parábola que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ y con vértice en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$. En la figura 1.6 hemos representado f para distintos valores de r .

Para presentar la transición al comportamiento caótico vamos a estudiar el com-

⁷Una función es unimodal si verifica las siguientes propiedades:

1. $f(0) = f(1) = 0$
2. f tiene un único punto fijo x_c con $0 < x_c < 1$

Dentro de la familia de funciones unimodales se encuentra la ecuación logística. Desde el punto de vista cualitativo, el comportamiento dinámico que caracteriza a las funciones unimodales es independiente de su forma específica, y para cualquier función unimodal podemos extender los resultados que obtengamos en relación al comportamiento de la función logística.

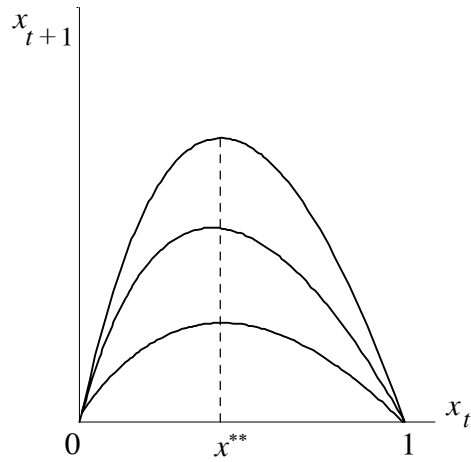


Figura 1.6.

portamiento de la órbitas del sistema para distintos valores del parámetro r .

Para $r = 0$ el único punto fijo es el cero y es estable. Para $0 < r < 1$ el punto fijo x^{**} es negativo (e inestable) y no pertenece al espacio de estados. Luego para $r < 1$ el único punto fijo es el cero, que es estable al ser $f'(x^*) = r < 1$. Cuando $r = 1$, x^* se vuelve inestable y aparece el segundo punto fijo. x^{**} (ahora positivo) pasa de inestable a estable al ser $f'(x^{**}) = 2 - r$, produciéndose una bifurcación transcítica. Esta situación se mantiene para $1 < r < 3$.

Para $r = 3$ el comportamiento empieza a complicarse. Para este valor, x^{**} pasa a ser inestable y emerge un ciclo de período dos (bifurcación de duplicación de período).

La aparición del ciclo de período dos puede ser mostrada analizando la segunda iteración de f

$$x_{t+2} = f(x_{t+1}, r) = f(f(x_t, r), r) = f^2(x_t, r)$$

que en el caso de la ecuación logística viene dada por

$$x_{t+2} = r \left(r (x_t - x_t^2) - r^2 (x_t - x_t^2)^2 \right)$$

En las figuras 1.7 y 1.8 están representadas las gráficas de f y f^2 para $r = 3$ y $r = 3.2$ respectivamente.

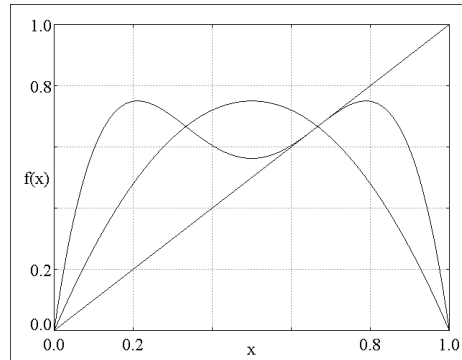


Figura 1.7.

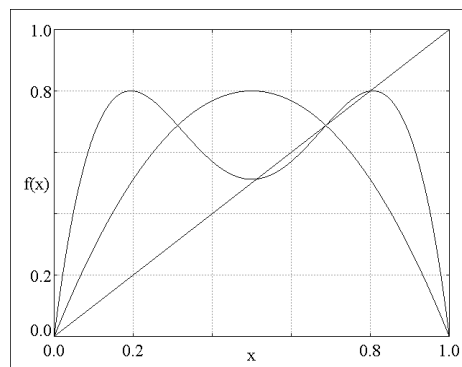


Figura 1.8.

En la figura 1.8 se observa que la gráfica de f^2 corta a la bisectriz en cuatro puntos, los puntos de equilibrio x^* y x^{**} (inestables) y en otros dos puntos, que corresponden al ciclo de período dos (veáse figura 1.9) de f , x^{1*} y x^{2*} :

$$x^{1*} = \frac{(r+1) + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

$$x^{2*} = \frac{(r+1) - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

La estabilidad del ciclo de período dos se puede analizar mediante el valor de la

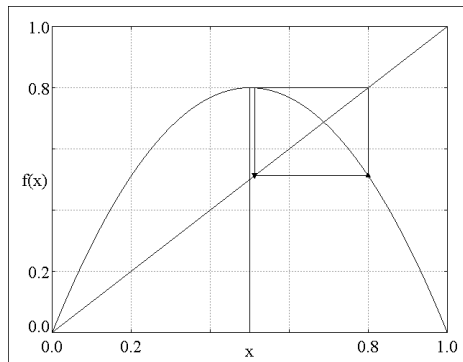


Figura 1.9.

derivada de $g = f^2$ evaluada en x^{1*} y x^{2*} , dada por:

$$g'(x^{1*}) = f'(f(x^{1*})) \cdot f'(x^{1*}) = f'(x^{2*}) \cdot f'(x^{1*}) = 1 - (r-3)(r+1)$$

Siempre que ésta sea mayor que -1 el ciclo de período dos es estable, lo que sucede si $r < 1 + \sqrt{5}$. Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período dos se vuelve inestable y surge un nuevo punto de período cuatro (nueva bifurcación de duplicación de período). Para analizar la estabilidad y aparición del ciclo de período 4, podemos, al igual que hemos hecho para el ciclo de período 2, construir y representar la cuarta iteración de f , f^4 . (véanse figuras 1.10 y 1.11).

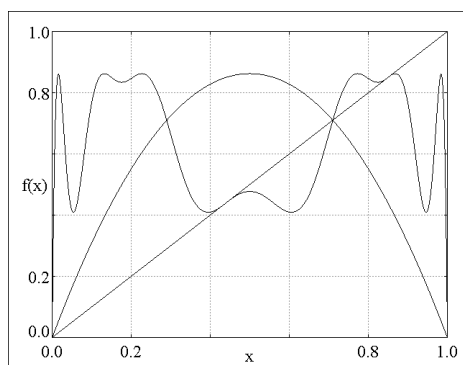


Figura 1.10.

La gráfica de f^4 corta a la diagonal en ocho puntos, los dos puntos fijos, los dos puntos correspondientes al ciclo de período dos y los cuatro correspondientes al

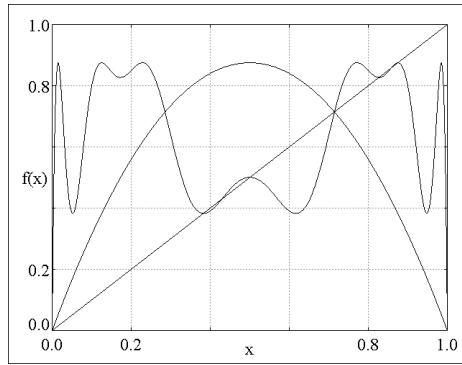


Figura 1.11.

ciclo de período 4. La aparición del nuevo ciclo no implica desaparición del ciclo de período dos, sólo su cambio del tipo de estabilidad. La estabilidad del ciclo de período cuatro se puede determinar nuevamente evaluando el valor de la pendiente de f^4 en los puntos correspondientes al ciclo de período cuatro (véase figura 1.12 para apreciar el ciclo de período cuatro).

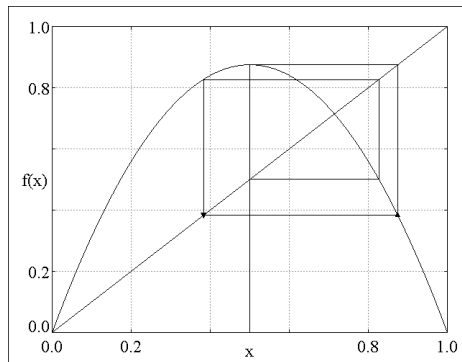


Figura 1.12.

Si continuamos el proceso, el ciclo de período cuatro se convierte en inestable y aparece un ciclo de período ocho, que pierde su estabilidad y aparece un ciclo de período dieciseis. La secuencia de bifurcaciones de duplicación de período converge a un punto de acumulación $r_c \approx 3.569446$, a partir del cual ningún ciclo es estable. Por encima de este valor comienzan a aparecer ciclos de período impar. Al principio son muy largos pero conforme r aumenta se hacen cada vez más cortos hasta que

para un determinado valor de r surgen los ciclos de período tres. Por encima de dicho valor aparece un número infinito de trayectorias aperiódicas y puntos fijos de todos los períodos. Esto se aprecia con claridad en el diagrama de bifurcación representado en la figura 1.13.

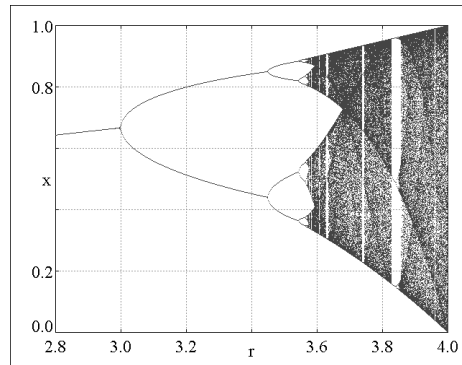


Figura 1.13.

La zona de parámetros $r_c < r \leq 4$ en la ecuación logística se denomina zona caótica. Como hemos visto, la transición al comportamiento caótico en la ecuación logística viene dada por la sucesión de bifurcaciones de duplicación de período.

En la figura 1.13, para algunos valores de r , observamos una nube de puntos que rellena todo el espacio, mientras que para otros, vemos ciclos atractivos de períodos bajos seguidos de una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período. Estas últimas zonas se denominan ventanas de período (veáse figura 1.14), y a pesar de su comportamiento en apariencia estable, también pertenecen a la zona caótica. Nótese que en estas zonas continúan existiendo órbitas periódicas de todos los períodos junto con órbitas aperiódicas, que no se observan pues arrancan de un conjunto de medida nula (en la práctica, probabilidad cero de situarse en estos datos iniciales, es decir, son inobservables).

Si en la zona caótica de la ecuación logística representamos en un gráfico las series temporales correspondientes a las órbitas de dos puntos próximos, $x_0 = 0.3$ y $x_0 = 0.31$, (veáanse figuras 1.15 y 1.16 respectivamente), se puede observar que

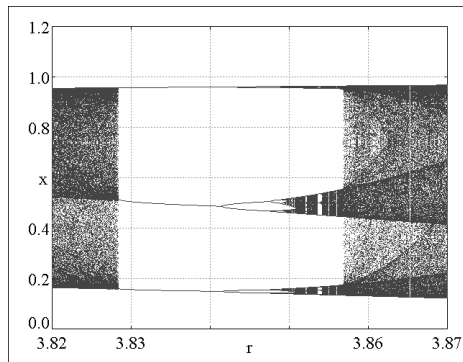


Figura 1.14.

las órbitas comienzan siendo muy parecidas, para ir separándose paulatinamente y comportarse de manera independiente la una de la otra.

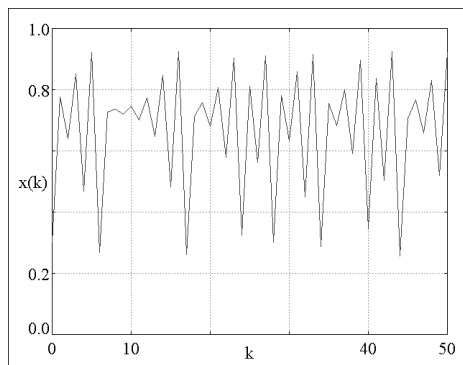


Figura 1.15.

Este fenómeno se conoce como *sensibilidad a las condiciones iniciales* y constituye una de las principales propiedades de los sistemas caóticos. Sea

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X \text{ abierto} \quad (1.7)$$

Definición 4 Una órbita $\gamma(x_0)$ del sistema dinámico (1.7) presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $x \in X$ y $n \geq 0$ verificando: $|x - x_0| < \epsilon$ y $|f^n(x) - f^n(x_0)| > \delta$. En este caso, se dice que la órbita $\gamma(x_0)$ es caótica.

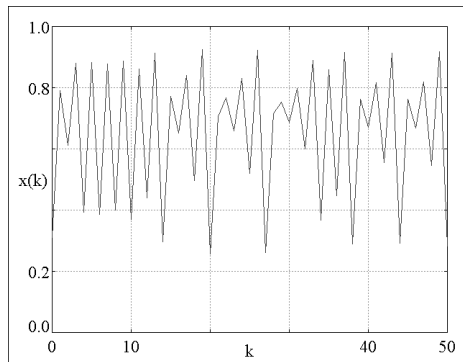


Figura 1.16.

En decir, $\gamma(x_0)$ es caótica si x_0 tiene puntos tan cerca como se quiera con órbitas que se separan, en algún momento, de la órbita del punto inicial una distancia mayor que δ .

En la zona caótica de la figura 1.13, los valores de x para un r concreto parecen distribuirse igualmente sobre un intervalo. Si para $r = 4$ dividimos el intervalo $[0, 1]$ en un cierto número de subintervalos tan pequeños como queramos, iteramos el sistema de la ecuación logística y construimos su histograma, obtenemos que la serie visita cada subintervalo con la misma probabilidad (véase figura 1.17).

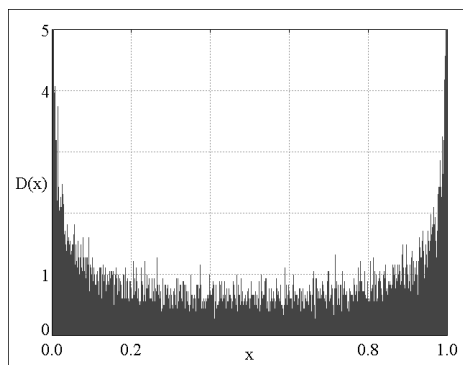


Figura 1.17.

Este resultado implica que trayectorias correspondientes a condiciones iniciales lejanas se aproximan en un período de tiempo finito. Esta propiedad se conoce con el nombre de *propiedad de mezcla o transitividad topológica*.

Definición 5 *Un atractor A del sistema dinámico (1.7) es topológicamente transitivo si dados dos subconjuntos cualesquiera $I, J \subset A$ de medida positiva, existe $n > 1$ tal que*

$$f^n(I) \cap J \neq \emptyset$$

Si la probabilidad de visitar cada intervalo es la misma, la serie temporal determinista tiene apariencia puramente aleatoria y, a veces, puede ser aproximada por una función de densidad continua. Este tipo de comportamiento dinámico se denomina comportamiento ergódico, del que hablaremos más adelante.

La definición de un conjunto topológicamente transitivo nos dice que un punto inicial de un subconjunto $U \subset A$ es llevado por la dinámica del sistema a cualquier otro subconjunto de A tras un período de tiempo, es decir, la dinámica esparce U por el espacio de fases y penetra por todas las partes de A . Este resultado está relacionado con otra propiedad de los sistemas caóticos, la *existencia de órbitas periódicas densas*.

Definición 6 *Dado un conjunto A y un subconjunto $U \subset A$. Decimos que U es denso en A si, para cada punto $x \in A$, existe un punto $u \in U$ arbitrariamente cercano a x .*

Si las órbitas de un sistema caótico son densas, tienden a rellenar el atractor cuando el número de iteraciones tiende a infinito. En el caso de la logística, para $r = 3.99$ la trayectoria rellena todo el diagrama de fases (véase figura 1.18). Como podemos intuir, esta propiedad está relacionada con la anterior. De hecho, si un atractor es topológicamente transitivo tiene una órbita densa.

A partir del sistema dinámico de la ecuación logística hemos obtenido las características propias de los sistemas dinámicos caóticos:

1. Existencia de infinitas órbitas periódicas.

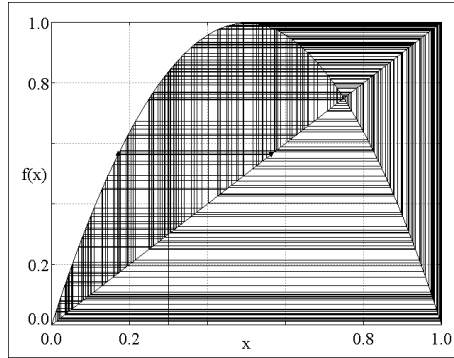


Figura 1.18.

2. Existencia de órbitas caóticas, que exhiben sensibilidad a las condiciones iniciales.
3. Existencia de atractor topológicamente transitivo, con una órbita caótica densa.

1.4 Atractores extraños

Las propiedades que acabamos de enumerar determinan que los atractores de los sistemas dinámicos caóticos presenten una estructura geométrica muy compleja. Un atractor que verifica la propiedad 3 suele ser denominado *atractor caótico o extraño* y su naturaleza es resultado de la dinámica particular de los sistemas caóticos.

El comportamiento de los sistemas caóticos se caracteriza por el estiramiento y posterior plegamiento del espacio de fases que da lugar a la naturaleza fractal que habitualmente presentan los atractores extraños y de la que hablaremos más adelante. Por un lado, por ser conjunto atractor, las órbitas tienden a aproximarse al atractor, lo que comprime el espacio de fases alrededor del atractor. Sin embargo, la sensibilidad a las condiciones iniciales provoca la separación de éstas dentro del atractor lo que genera el estiramiento del espacio de fases. Pero, por otro lado, la transitividad topológica implica que las órbitas inicialmente separadas pueden llegar a aproximarse a largo plazo, lo que determina el plegamiento del atractor sobre sí

mismo.

Sin embargo tras esta complejidad y aparente desorden se esconden con frecuencia procesos de enorme sencillez. Para apreciar este hecho vamos analizar la dinámica de la ecuación logística en las zonas de transición al comportamiento caótico.

Si cogemos una de las ventanas de período que aparecen en la zona caótica de la ecuación logística y la ampliamos observamos que aparece un ciclo de período n atractivo seguido de una cascada de bifurcaciones de duplicación de período (véase figura 1.13). En la ventana ampliada podemos observar la existencia de otras ventanas. Si ampliamos cualquiera de ellas y repetimos sucesivamente esta operación, observamos siempre el mismo resultado, la aparición de un ciclo de un cierto período n atractivo seguido de una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período. Luego parece que la estructura global fuese resultado de la iteración infinita de un proceso de naturaleza muy simple, que da lugar a que esa estructura global sea muy compleja. El surgimiento de una estructura de naturaleza compleja a partir de la iteración de procesos sencillos es una característica propia de los objetos fractales. Esta propiedad de los objetos fractales recibe el nombre de autosimilitud, y se puede definir de manera informal como la propiedad de ser parecidos a sí mismos a todas las escalas.

En términos generales, la naturaleza complicada de los atractores que se observan en los sistemas dinámicos caóticos, denominados atractores extraños o caóticos, suele ser de tipo fractal. La presencia de esta característica se observa perfectamente durante la transición al comportamiento caótico de la ecuación logística, donde hemos visto que siempre se repite la misma estructura: la aparición de ciclos atractivos seguidos de bifurcaciones de duplicación de período. Detrás del comportamiento aparentemente desordenado de las dinámicas caóticas existe un orden.

Este resultado es muy importante en relación con la capacidad de predicción de los sistemas caóticos, ya que, si somos capaces de describir estas estructuras

ordenadas, quizás podamos decir algo sobre el comportamiento del sistema en el largo plazo.

El grado de complejidad del atractor se suele medir con una serie de técnicas dinámicas y geométricas que analizaremos más adelante.

1.5 Caos topológico

Como hemos visto en el sistema dinámico de la ecuación logística, la existencia de un ciclo de período tres es una condición suficiente para la existencia de comportamiento caótico. Li y Yorke demostraron este resultado, recogido en el siguiente teorema:

Teorema 9 (Li-Yorke, 1975) *Sea I un intervalo y sea $f : I \rightarrow I$ continua. Supongamos que existe un punto $a \in I$ para el cual $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, y $d = f^3(a)$ cumplen*

$$d \leq a < b < c \quad (\text{ó } d \geq a > b > c)$$

entonces:

i) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto periódico en I con período n

ii) existe un conjunto no numerable $S \subset I$ el cual satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada $p, q \in S$ con $p \neq q$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0 \quad y$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

(b) Para todo $p \in S$ y cada punto periódico $q \in I$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

Las hipótesis del teorema garantizan la existencia de una órbita de período tres, lo cual implica: 1) que existen infinitas órbitas periódicas, 2) existencia de órbitas caóticas, 3) ninguna trayectoria temporal que comienza en S converge asintóticamente a una trayectoria periódica.

Otro teorema relacionado con la existencia de órbitas de período tres es el Teorema de Sarkovskii. Este resultado muestra que si en un sistema dinámico tiene una órbita de período tres, también tiene órbitas de todos los períodos anteriores.

Teorema 10 (Sarkovskii, 1964) Sea el siguiente orden de los números naturales:

$$\begin{aligned} 3 & \succ 5 \succ 7 \dots \\ & \succ 2.3 \succ 2.5 \succ 2.7 \succ \\ & \dots \\ & \succ 2^n .3 \succ 2^n .5 \succ 2^n .7 \\ & \dots \\ & \succ \dots \succ 2^m \succ \dots \succ 8 \succ 4 \succ 2 \succ 1 \end{aligned}$$

Si f es continua y tiene un ciclo de período n , entonces tiene un ciclo de período n' para todo entero n' tal que $n \succ n'$.

Los dos teoremas que acabamos de presentar garantizan la existencia de lo que se denomina *caos topológico*: si un sistema dinámico tiene un ciclo de período tres, entonces existe un conjunto no numerable S de condiciones iniciales, las cuales dan lugar a trayectorias caóticas. Sin embargo, ambos resultados no dicen nada sobre el tamaño de dicho conjunto S , no excluyendo la posibilidad de que exista un

conjunto de condiciones iniciales para el que, con probabilidad uno, las trayectorias converjan a orbitas periódicas estables de manera que las trayectorias caóticas sean inobservables. Esto es, bien podría suceder que el conjunto S tenga medida nula y, en la práctica, sea inobservable (de hecho, podría no existir atractor caótico). Muchos autores han considerado de mayor interés encontrar condiciones bajo las cuales dichas trayectorias puedan ser observadas, es decir, demostrar la existencia de lo que denominan *caos observable*, concepto que trataremos más adelante.

A continuación presentamos una serie de instrumentos dinámicos y geométricos que permiten cuantificar el grado de complejidad de los sistemas caóticos.

1.6 Exponentes de Lyapunov

La manera habitual de determinar la presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales es mediante los denominados *exponentes de Lyapunov*. Consideremos el sistema dinámico discreto unidimensional:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}$$

y dos condiciones iniciales próximas x_0 e $x_0 + \delta$. Tras N iteraciones, la diferencia entre los dos puntos viene dada por:

$$|f^N(x_0) - f^N(x_0 + \delta)| \approx \delta \left| \frac{df^N}{dx}(x_0) \right| = \delta e^{NL(x_0)}$$

$e^{L(x_0)}$ sería el factor medio por el cual la distancia entre dos puntos cercanos del espacio de fases del sistema se incrementa tras N iteraciones. Al exponente $L(x_0)$ se le denomina exponente de Lyapunov y mide la tasa de divergencia exponencial de las órbitas del sistema cercanas inicialmente a x_0 . Tomando logaritmos y límites

cuando $\delta \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ en la expresión anterior obtenemos:

$$L(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx} \right|$$

Si el exponente es positivo indica divergencia o separación de las órbitas de puntos (expansión del espacio de fases) próximos, mientras que si es negativo implica convergencia de dichas órbitas (contracción del espacio de fases).

Para el caso n -dimensional tenemos que en el sistema dinámico:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n$$

tras N iteraciones, la diferencia entre dos puntos próximos n -dimensionales x_0 y $x_0 + \delta$ viene dada por:

$$|f^N(x_0) - f^N(x_0 + \delta)| \approx |J_N(x_0)\delta|$$

donde $J_N(x_0)\delta$ es la matriz jacobiana de f^N evaluada en x_0 , que es de dimensión $n \times n$ y posee n autovalores. Si denotamos los autovalores de la matriz como θ_i^N y los ordenamos de mayor a menor $|\theta_1^N| \geq |\theta_2^N| \geq \dots \geq |\theta_n^N|$, los exponentes de Lyapunov L_i , $i = 1, \dots, n$, se definen como:

$$L_i(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\theta_i^N(x_0)|$$

En general un sistema dinámico n -dimensional tiene n exponentes de Lyapunov. Un valor positivo del exponente indica una expansión del espacio de fases mientras que un valor negativo una contracción de dicho espacio. Si ordenamos los exponentes de mayor a menor $L_1^N \geq L_2^N \geq \dots \geq L_n^N$, el primer exponente mide la tasa máxima de divergencia media de las órbitas de puntos infinitesimalmente cercanos a él, la suma de los dos primeros nos da el máximo factor en promedio por el cual se produce el

cambio de área, la suma de los tres primeros el máximo factor en promedio por el cual se produce el cambio de volumen, etc. Si todos los exponentes son negativos el atractor es un punto fijo asintóticamente estable. Para la existencia de caos en sistemas n -dimensionales se requiere que el mayor exponente de Lyapunov sea positivo.

En el caso de la logística, para la zona caótica $r_c < r \leq 4$, el exponente es positivo excepto para los valores de r pertenecientes a las ventanas de comportamiento periódico en las que el comportamiento dinámico es estable y el exponente es negativo. En la zona no caótica $0 \leq r < r_c$ el exponente siempre es negativo (véase figura 1.19).

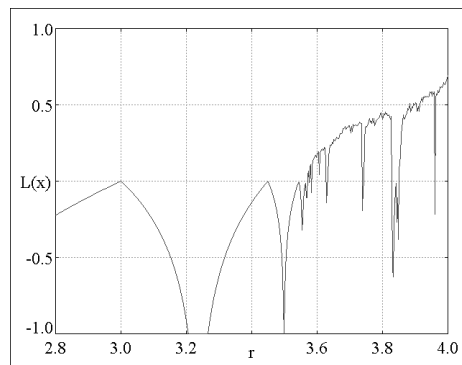


Figura 1.19.

Finalmente, es importante señalar que la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales hace imposible la predicción a largo plazo del sistema. Este problema puede solucionarse, como veremos más adelante, si es posible analizar las propiedades estadísticas de las órbitas y determinar su comportamiento probable o típico.

1.7 Dimensión del atractor extraño

Existen distintos conceptos de dimensión de un atractor extraño. Por una lado están aquellos que hacen referencia al atractor como objeto geométrico, (dimensión box-counting y dimensión de Hausdorff), y por otro lado los que estudian el tipo de

dinámica que en él tiene lugar (dimensión de correlación y dimensión de información).

La dimensión euclídea de un objeto asigna a éste un valor entero. Sin embargo existen otro tipo de dimensiones cuyo valor es un número no entero. En general, si el atractor posee dimensión no entera es probable que el atractor sea extraño⁸.

Vamos a presentar los conceptos más utilizados de este tipo de dimensión.

Dimensión Box-Counting El primero de los conceptos está relacionado con el grado de ocupación del espacio por el atractor. Consiste en estimar el tamaño del conjunto que soporta la dinámica asintótica del sistema. Supongamos que queremos medir la longitud de una línea recta. Para ello tomamos un segmento de un cierto tamaño λ y calculamos el número de veces $N(\lambda)$ que desplazamos el segmento para recorrer toda la línea. Independientemente de la longitud del segmento λ , la longitud de la recta es $L = \lambda N(\lambda)$. En dimensión dos nos podemos preguntar el número de cuadrados de lado λ necesarios para cubrir una determinada superficie. En este caso el área de dicha superficie viene dada por $A = \lambda^2 N(\lambda)$. En dimensión tres para medir el volumen de un cubo nos podemos preguntar por el número de cubos de lado λ que son necesarios para recubrir el cubo original. En este caso $V = \lambda^3 N(\lambda)$. En todos estos ejemplos la dimensión D de los objetos aparece como el exponente de la escala de longitud λ^D . Luego calcular la dimensión del objeto es equivalente a buscar D tal que:

$$N(\lambda) \cdot \lambda^D \approx C \equiv cte \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow 0$$

Tomando logaritmos definimos la *dimensión Box-Counting* de un objeto geomé-

⁸No obstante, la dimensión no entera no es condición necesaria ni suficiente para que el atractor sea extraño.

trico como:

$$D_{BC} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln N(\lambda)}{\ln(\frac{1}{\lambda})}$$

donde $N(\lambda)$ es el menor número de conjuntos de diámetro λ que cubren dicho objeto. Este método de calcular la dimensión se comporta bien sobre objetos regulares.

Dimensión de Hausdorff-Besicovitch Consideremos un objeto en una superficie. Hemos visto que el número de cuadrados de lado λ necesarios para cubrir una determinada superficie es $N(\lambda) \approx \lambda^{-2}$ y que el área es $A(\lambda) = N(\lambda)\lambda^2$. Si intentamos calcular la longitud de dicho objeto nos encontramos con que se necesitaría un número infinito de segmentos de longitud λ para cubrirlo, de manera que su longitud sería infinita. Por otro lado si calculamos el volumen del mismo objeto, el número de cubos de lado λ necesarios para cubrirlo es igual al número de cuadrados de lado λ necesarios para cubrirlo, luego su volumen cuando $\lambda \rightarrow 0$ es:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} N(\lambda)\lambda^3 \approx \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2}\lambda^3 = 0$$

es decir, el volumen de un objeto contenido en una superficie es nulo. El segundo concepto de dimensión se basa en este resultado. Sea un objeto geométrico cuyo tamaño queremos medir por medio de elementos de tamaño $t(\lambda) = g(d)\lambda^d$, donde d es la dimensión del elemento de prueba, λ es la longitud característica de dicho elemento (longitud del segmento, lado de los cuadrados o cubos) y $g(d)$ es un factor geométrico, igual a la unidad para segmentos, cuadrados y cubos. La *medida* del objeto M_d , es la suma de los tamaños de todos los elementos de prueba que han sido necesarios para recubrir el objeto:

$$M_d = \sum g(d)\lambda^d = g(d)N(\lambda)\lambda^d$$

Se define la dimensión de *Haussdorff-Besicovitch* del objeto como el número D tal que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} M_d = \begin{cases} 0, & \text{si } d > D \\ \infty, & \text{si } d < D \end{cases}$$

El valor de M_d para $d = D$ es, a menudo, finito pero también puede ser nulo o infinito. De todas formas lo importante no es el valor de M_D sino la posición del salto en M_d como función de d .

Dimensión de correlación. Metodo de Grassberger-Procaccia. Acabamos de presentar dos conceptos que hacen referencia al “tamaño” del atractor. Existen otros conceptos de dimensión que se refieren al tipo de dinámica que en él tiene lugar. Vamos a ver uno de ellos, la dimensión de correlación. Para ello empleamos lo que se conoce como técnica de alojamiento ó embedología.

Supongamos que tenemos una serie de valores x_t obtenidos de la observación a intervalos de tiempo regulares de una determinada variable del sistema. Estas observaciones forman una serie temporal x_1, x_2, \dots, x_T . Cogemos el último valor observado x_T y los m valores anteriores, y construimos con ellos un vector \bar{x}_T^m , tal que $\bar{x}_T^m = (x_T, x_{T-1}, \dots, x_{T-m+1})$. Hacemos lo mismo para cada elemento de la serie en orden descendente. Como los $m - 1$ primeros valores de la serie no tienen suficientes predecesores obtenemos $T - m + 1$ vectores \bar{x}_t^m , $t = m, \dots, T$. Con este procedimiento obtenemos $T - m + 1$ puntos en un espacio de dimensión arbitraria m , llamada dimensión de alojamiento. Este método se conoce como método de alojamiento (embedding) y fue propuesto por Grassberger y Procaccia (1983) para el cálculo de la dimensión fractal a partir de datos muestrales.

Takens (1981) demostró que los puntos de este espacio forman una estructura geométrica topológicamente equivalente al atractor del sistema original para valores

suficientemente grandes de m . Si esto es así podemos obtener una órbita ficticia que reproduce todas las propiedades de la órbita original sobre la que se ha generado la serie temporal, es decir, es posible reconstruir el comportamiento desconocido del sistema dinámico a partir de la serie observada. No obstante este método presenta algunos problemas. El más importante es el desconocimiento de la dimensión del espacio de fases donde se sitúa el verdadero atractor, lo que implica que la elección de m no sea muy precisa.

A partir de los $T - m + 1$ vectores podemos determinar lo que se denomina dimensión de correlación que pasamos a calcular. Sin embargo, antes queremos señalar que el método de alojamiento no sólo es importante porque permite calcular la dimensión de correlación, sino porque a partir de él se pueden desarrollar una serie de algoritmos numéricos diseñados para estudiar la presencia de caos determinista, como el de Wolf et al. (1985) que estiman el mayor exponente de Lyapunov.

Supongamos que el objeto generado a partir de estos vectores es equivalente al verdadero atractor y que éste es caótico. Si cogemos dos puntos cercanos situados sobre el atractor, sabemos que debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, estos puntos están dinámicamente incorrelados. Sin embargo, como ambos puntos están sobre el atractor estarán cerca en el espacio de fases. Dos puntos x^i y x^j están espacialmente correlados si la distancia euclídea es menor que el radio r de una bola m -dimensional centrada en uno de los dos puntos, es decir, si $|x^i - x^j| < r$. La correlación espacial entre todos los puntos del atractor se calcula como el límite cuando $m \rightarrow \infty$ del cociente entre el número de pares de puntos que están separados una distancia mayor que r y el total de pares de puntos:

$$C(r, m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \sum_{i,j=1}^T H(r - |x^i - x^j|)$$

donde $H(y)$ es la función de Heaviside, que toma el valor uno si $y > 0$ y el valor cero

en caso contrario. La función $C(r, m)$ se denomina integral de correlación y crece desde 0 hasta 1 cuando r crece de 0 a ∞ . Si $C(r, m) \approx r^d$ cuando $r \rightarrow 0$, definimos la dimensión de correlación como:

$$D_C(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r, m)}{\log r}$$

Gráficamente la dimensión de correlación es la pendiente del gráfico que obtenemos al representar la relación entre $\log C(r, m)$ y $\log r$. Si la pendiente aumenta según va aumentando m hasta que alcanza un valor constante, entonces el sistema es determinista, y si crece continuamente el proceso es estocástico. Luego la D_c constituye un método para discriminar entre sistema estocásticos y deterministas.

Un algoritmo diseñado a partir del concepto de integral de correlación es el test BDS (Brock, Dechert y Scheikman, 1987), que se utiliza para detectar la presencia de estructura (lineal o no lineal)⁹ en los datos.

1.8 Ergodicidad

Acabamos de presentar varios instrumentos que analizan el atractor desde el punto de vista geométrico. Ya hemos señalado que existen otros que hacen referencia al tipo de dinámica que en él tiene lugar. En concreto, tratan de obtener información estadística sobre la probabilidad de distintos tipos de comportamiento dinámico en el atractor. Para su análisis es necesario el uso de la *teoría de la medida*. Así, en primer lugar, vamos a presentar brevemente algunos de sus elementos principales.

Un aplicación (medida) que asigna un número a cada conjunto y cumpla:

- a) La medida de cualquier conjunto es un número no negativo
- b) La medida de la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos

⁹En la medida que este test no discrimina entre estructura lineal o no lineal es necesario eliminar toda dependencia lineal y después trabajar con los residuos.

disjuntos es igual a la suma de las medidas de cada conjunto individual

se denomina *medida*.

Si además satisface:

c) La medida de todo el espacio es 1

se denomina *medida de probabilidad*.

Por último si una medida μ cumple la propiedad:

d) $\mu(f^{-1}(S)) = \mu(S)$ para cada conjunto cerrado S

se denomina *medida invariante* respecto a f .

Dada una medida invariante μ respecto a f , el teorema de Birkhoff (1936) establece que, para cualquier función h medible y μ -integrable, el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n h(f^k(x_0)) \quad (1.8)$$

existe en casi todo punto $x_0 \in S$. Se dice que el sistema dinámico dado por f es *ergódico* si, además, este límite es independiente de la condición inicial x_0 . En este caso, podemos definir:

$$\mu_e(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n h(f^k(x_0))$$

donde $\mu_e(S)$ es una *medida ergódica* para cada subconjunto S invariante. La exigencia de que $\mu_e(S)$ coincida para casi todo punto x_0 del espacio de fases admite la existencia de órbitas atípicas pero irrelevantes en términos de la medida de puntos que generan. Esta propiedad garantiza que la media de una función h medible e integrable sobre un conjunto S se puede calcular promediando el valor de h a lo largo de una órbita.

Una medida ergódica de especial interés en el estudio de los sistemas dinámicos se introduce a continuación. En particular, si $h = 1_s$, siendo:

$$1_S(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \in S \\ 0 & \text{si } x_k \notin S \end{cases}$$

se define la fracción de iteraciones de la órbita $\gamma(x_0)$ que cae dentro de un subconjunto S (invariante) del espacio de fases como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n 1_S(x_k)$$

donde $x_k = f^k(x_0)$. Así, se define la *medida natural* de S como:

$$\mu_N(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n 1_S(x_k)$$

Esta medida determina la proporción de puntos que caen dentro de cada subconjunto de S o el tiempo que las órbitas del sistema están en S , y además, por ser ergódica, garantiza que dicha proporción tiene un valor estable independientemente de la órbita elegida (esto habitualmente se suele expresar diciendo que los promedios espaciales coinciden con los temporales). La teoría ergódica es muy potente ya que permite inferir la conducta probable del sistema a partir de su observación (lo que hace la inferencia estadística): para un x_0 típico lo que sucede con $f^n(x_0)$ si $n \rightarrow \infty$, y establecer propiedades globales o teóricas de dicho sistema.

La propiedad de ergodicidad nos permite definir un concepto de caos (*caos ergódico*) más fuerte que el caos topológico. Al analizar las características de los atractores extraños señalamos que la sensibilidad a las condiciones iniciales imposibilitaba la predicción de la evolución del sistema. En la práctica, el atractor como conjunto geométrico nunca está disponible y lo que tenemos son órbitas del sistema dinámico. Si existe una medida natural el porcentaje de puntos que caen en una región

S del atractor ó la proporción de tiempo que las órbitas pasan en dicha región es independiente de la órbita elegida. Luego una órbita típica del sistema representará geoméricamente al atractor y su observación nos dará una distribución de probabilidad que permita hacer inferencia sobre la conducta probable del sistema. Este resultado es de suma importancia debido a que si calculamos las distintas magnitudes que definimos para caracterizar el grado de complejidad del atractor (exponentes de Lyapunov, dimensiones,...), la existencia de una medida natural garantiza que éstas estén bien definidas al ser independientes de la órbita elegida.

Al definir el concepto de caos topológico señalamos el problema de la posible no observabilidad de las trayectorias caóticas, al no excluirse la posibilidad de que exista un conjunto de condiciones iniciales para el que, con probabilidad uno, las trayectorias convergen a órbitas periódicas estables. El hecho de que el conjunto de condiciones iniciales que da lugar a trayectorias caóticas S tenga medida natural positiva tampoco garantiza que éstas sean observables. Para eliminar este problema, necesitamos utilizar un concepto de medida más “físico” desde el punto de vista de la observabilidad, *la medida de Lebesgue*, que denotamos por m . Esta medida es la única que asigna a cada intervalo su longitud como medida probabilística:

$$m(a, b] = |b - a|$$

Si en un sistema dinámico caracterizado por un conjunto invariante S que soporta una medida ergódica $\mu(S) > 0$, el conjunto de puntos atraídos por S tiene medida de Lebesgue cero, una órbita que visita el conjunto S es “típica” con respecto a μ e “irrelevante” con respecto a m . En este caso S no puede considerarse el atractor del sistema desde el punto de vista de la observabilidad. Para evitar este resultado debemos exigir que la medida μ sea *absolutamente continua* con respecto a la medida

de Lebesgue o, equivalentemente, que μ esté dominada por m :

$$\mu \ll m$$

Si la medida μ es absolutamente continua, para todo conjunto medible S se cumple:

$$\mu(S) > 0 \Rightarrow m(S) > 0$$

En consecuencia, existe *caos observable ó robusto* cuando el conjunto de condiciones iniciales que da lugar a trayectorias caóticas tiene medida ergódica positiva absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue); en tal caso el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias caóticas S es observable. La absoluta continuidad respecto a la medida de Lebesgue también implica que la medida puede ser descrita en términos de una función de densidad g :

$$\mu(S) = \int_S g(x) dx$$

para cualquier subconjunto medible S del espacio de fases.

Existe un resultado que permite encontrar medidas invariantes y en algunos casos medidas naturales para sistemas dinámicos unidimensionales. Lo enunciamos en el siguiente teorema¹⁰:

Teorema 11 *Supongamos que $f : I \rightarrow I, I \subset \mathbb{R}$ es suave y expansiva a trozos¹¹ en el intervalo $[0, 1]$. Entonces, f tiene una medida invariante μ absolutamente continua.*

¹⁰Para una demostración rigurosa de este Teorema véase Lasota y Yorke (1973) y Li y Yorke (1978).

¹¹ f es suave a trozos si $f(x), f'(x)$ y $f''(x)$ son continuas y acotadas excepto para un número finito de puntos. Por otro lado, f es expansiva a trozos si además existe una constante $\alpha > 1$ tal que $|f'(x)| \geq \alpha$ excepto para un número finito de puntos en $[0, 1]$.

Si f' es discontinua en un sólo punto, entonces μ es una medida natural.

El sistema dinámico de la ecuación logística para $\mu = 4$ es ergódico y tiene una medida positiva absolutamente continua e invariante con función de densidad¹² (Ulam y von Neumann, 1947):

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}$$

En la práctica, demostrar la existencia de caos ergódico y caos observable es mucho más complicado que demostrar que existe un ciclo de período tres (caos topológico). Si somos capaces de excluir la posibilidad de que existan órbitas periódicas estables, para un valor del parámetro r , el problema de la no observabilidad del caos desaparece y basta con demostrar la existencia de caos topológico para que dichas trayectorias sean observables. Existe un método que permite excluir la existencia de tales órbitas en algunos casos. Este método se basa en el valor de la *derivada Schwarziana*:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Se demuestra (Singer, 1978) que:

Si $f(x)$ es unimodal, tres veces diferenciable, $Sf(x) < 0$ si $f'(x) \neq 0$, $f'(a) > 1$ si $f(a) = a$ y $f(x) > x$ en $[a, x^*]$ donde x^* es el punto crítico ($f'(x^*) = 0$), entonces $x_{t+1} = f(x_t)$ tiene a lo sumo un ciclo periódico estable.

Este resultado no implica que f tenga un ciclo atractivo. Collet y Eckman (1981) proponen el siguiente teorema para establecer la existencia de un ciclo periódico estable:

Teorema 12 *Si $f(x)$ tiene un ciclo periódico estable, entonces el punto crítico x^**

¹²Para un estudio detallado de la existencia de medidas absolutamente continuas e invariantes en la familia de funciones unimodales véase Jakobson (1981).

será atraído hacia el.

1.9 Entropía

Hemos señalado varias veces que debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, trayectorias de condiciones iniciales cercanas divergen exponencialmente. Esto determina que pequeños cambios en las condiciones iniciales permanecen inobservables inicialmente, pero debido a la divergencia exponencial resultan observables cuando el sistema evoluciona en el tiempo. Aunque al principio no disponemos de información sobre posibles diferencias en las condiciones iniciales a medida que el tiempo avanza se produce dicha información. Lo siguiente que nos planteamos es cómo medir esta ganancia de información. Para medir esta ganancia se utiliza el concepto de entropía. El concepto de entropía fue utilizado inicialmente por Shannon (1948) en teoría de la información. Shannon definió que en general para N sucesos no equiprobables la esperanza de la información obtenida al enteranos del resultado siguiente es:

$$I = - \sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k$$

donde p_k son las probabilidades de cada uno de los N sucesos. A partir de este concepto vamos a medir la ganancia de información en un sistema dinámico discreto

$$x_t = f(x_{t-1})$$

Supongamos que el sistema dinámico es bidimensional y que tiene un atractor $A \subset \mathbb{R}^2$. Inicialmente particionamos el plano mediante una malla finita de cuadrículas c_i , $i = 1, \dots, m$. Sea $C_0 = (c_1, \dots, c_m)$ dicha partición, donde cada cuadrícula tiene una determinada longitud de lado ε_i , escogida de tal forma que dentro de cada c_i no podemos distinguir entre dos puntos distintos. Para cada cuadrícula c_i la iteración de f determina otra partición que llamamos $C_1 = (f^1 c_1, \dots, f^1 c_m)$, donde cada $f^1 c_i$

es el conjunto de puntos que resultan de la iteración de f en c_i . Según el tiempo avanza la iteración de f da lugar a nuevas particiones del plano $C_k = (f^k c_1, \dots, f^k c_m)$ cada vez más pequeñas, donde $f^k C$ corresponde a la k -ésima partición. Si el sistema dinámico es ergódico cada cuadrícula tiene asignada una medida de probabilidad $\mu(c_i)$ que nos da la probabilidad de que un punto del atractor elegido al azar esté dentro de ella. La información contenida en una partición k es:

$$H_k = - \sum_{i=1}^m \mu(f^k c_i) \log_2 \mu(f^k c_i)$$

y nos da la ganancia de información, correspondiente a la partición k , al enterarnos en qué cuadrícula está un punto del atractor. Dadas dos particiones consecutivas C_k y C_{k+1} el límite:

$$h(\rho) = \lim_{k \rightarrow \infty} [H_{k+1} - H_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_k$$

se denomina entropía y nos mide la tasa de creación de información con respecto a la partición que hemos realizado¹³. En ella no sólo consideramos el número de objetos que cubren el atractor como en las dimensiones de Box-Counting y de Hausdorff, sino que tenemos en cuenta la proporción del atractor que está en cada cuadrícula $\mu(c_i)$, o lo que es lo mismo, el promedio de tiempo que una órbita típica pasa en c_i .

Cuanto más pequeño sea el tamaño de las particiones mayor será el valor de h , en la medida que cuanto más pequeñas mayor la incertidumbre sobre en cuál de ellas se encuentra un punto del atractor. Luego h aumenta cuando disminuye el tamaño de la partición, o lo que es lo mismo, cuando lo hace la longitud del lado de las cuadrículas ε_i . En general si el sistema es aleatorio la entropía tiende a infinito

¹³La definición de Shannon de entropía no es la única. Se define la entropía de Kolmogorov como:

$$K_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} - \log \sum_{i=1}^N \mu(f^{-k} c_i)^2$$

cuando disminuimos el tamaño de las particiones, mientras que en los sistemas caóticos la entropía tiende a un valor finito y positivo. Una entropía constante implica que el sistema dinámico sólo puede tener puntos periódicos.

Podemos medir cómo aumenta la entropía al disminuir el lado de las cuadrículas ε mediante lo que se denomina dimensión de información:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^N \mu(c_i) \log_2 \mu(c_i)}{-\log \varepsilon}$$

que nos da una medida cualitativa de la información que se gana sobre la posición de los puntos en el atractor cuando lo observamos cada vez a una escala más pequeña.

En la medida que la incertidumbre viene dada por la divergencia exponencial de puntos cercanos, la entropía debe estar relacionada con los exponentes positivos de Lyapunov. Supongamos una bola infinitesimal de radio ε que mediante la iteración de f se transforma en una elipse. La elipse tendrá semieje mayor de orden de $\varepsilon e^{L_i n}$, siendo L_i el primer exponente de Lyapunov. Puede suceder que dos puntos que inicialmente eran indistinguibles en dicho semieje, tras la n -iteración de f dejen de serlo. En este caso la tasa media de creación de información debida al estrechamiento de la bola es L_i . Considerando las direcciones inestables de la bola (donde obtenemos información por la separación de puntos cercanos) tenemos que (Pesin, 1977):

$$h(\rho) = \sum_{L_i > 0} L_i$$

es decir, la ganancia media de información, entropía del sistema dinámico es igual a la suma de los exponentes positivos de Lyapunov¹⁴.

¹⁴Esta igualdad se cumple para el caso en que ρ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. En caso de que no lo sea, se tiene que (Ruelle, 1978):

$$h(\rho) \leq \sum_{L_i > 0} L_i$$

2 Modelos de crecimiento con dinámicas caóticas

A continuación vamos a revisar los principales modelos de crecimiento económico donde se han analizado la existencia de dinámicas caóticas. En general podemos considerar la existencia de cinco tipos de modelos donde se ha llevado a cabo este análisis: a) modelo de Solow, b) modelos de crecimiento óptimo exógeno, c) modelos de generaciones sucesivas, d) modelo de Goodwin y e) modelos de crecimiento endógeno. Revisaremos todos ellos y analizaremos qué modificaciones se han realizado en los supuestos de partida de los modelos originales para que la dinámica simple que les caracteriza ahora pueda ser muy complicada.

Como veremos, en los modelos de Solow, crecimiento óptimo y generaciones sucesivas la mayor parte de los trabajos tratan de buscar condiciones sobre las funciones de utilidad y producción que generen una función unimodal, que represente la dinámica del sistema, (la mayor parte la ecuación logística) y demostrar la existencia de caos topológico. Sólo en algunos de ellos (los más actuales) se ocupan de demostrar la existencia de caos ergódico. Las condiciones que obtienen, sobre todo los modelos de crecimiento óptimo y generaciones sucesivas, son muy similares. En la medida que la obtención de caos en tiempo continuo requiere más de dos variables, éstos trabajos se centran en el estudio de modelos en tiempo discreto donde la dimensión requerida es menor y, por tanto, el análisis resulta mucho más sencillo. En cuanto al modelo de Goodwin también se estudian qué condiciones imponer sobre los supuestos de partida para que la dinámica del sistema venga dada por la ecuación logística. En este modelo los trabajos se han desarrollado en tiempo discreto y continuo. Aunque los trabajos iniciales se centraron en modelos de crecimiento exógeno, posteriormente se han desarrollado trabajos que estudian la aparición de dinámicas complejas en modelos de crecimiento endógeno. La dificultad analítica en éstos es mayor, al tratarse de modelos más complejos desde el punto de vista teórico y formal. Analizaremos dos de ellos y veremos que las condiciones para la aparición

de caos no son muy distintas de las que obtienen los modelos de crecimiento exógeno.

2.1 Modelo de Solow

La obtención de comportamiento caótico en el modelo de Solow (1956) tiene su origen en el trabajo de Day (1982). En este artículo se estudia la posibilidad de obtener caos en la versión discreta del modelo de Solow.

En primer lugar, Day describe el modelo de Solow en términos discretos. La ecuación de movimiento del capital K en tiempo discreto, suponiendo que no existe depreciación, viene dada por:

$$K_{t+1} = s \cdot F(K_t, L_t) \quad (2.1)$$

donde s es la tasa exógena de ahorro y la función de producción $F(K_t, L_t)$ es neoclásica (rendimientos decrecientes del factor acumulable, constantes a escala y cumplimiento de las condiciones de Inada).

Teniendo en cuenta que la población L crece a una tasa constante y exógena n , $L_t = (1+n)L_0$ y que la función de producción es neoclásica, si dividimos la ecuación (2.1) entre L_t la ley de movimiento del capital per cápita es:

$$k_{t+1} = g(k_t) = \frac{s \cdot f(k_t)}{(1+n)} \quad (2.2)$$

Solow supone que la tasa de ahorro es constante y exógena. Bajo estos supuestos, la economía converge de forma monótona a un estado estacionario estable donde el crecimiento de las variables per cápita es cero. Gráficamente esta situación viene dada por la figura 2.1.

A partir de este modelo Day muestra que modificando los supuestos iniciales sobre el comportamiento del ahorro o la productividad del capital, el sistema puede converger al estado estacionario, a ciclos periódicos o dar lugar a fluctuaciones

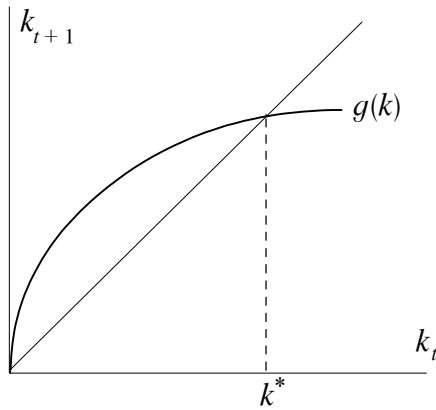


Figura 2.1.

caóticas. Para este último resultado utiliza el teorema de Li-Yorke.

Vamos a presentar uno de los ejemplos que él estudia. En éste Day sigue suponiendo que la tasa de ahorro es constante, pero introduce un “efecto polución” en la productividad del capital. Este efecto consiste en que la productividad del capital se ve reducida por un incremento en la concentración del capital. La función de producción en términos per cápita viene dada entonces por:

$$f(k) = Bk^\beta (m - k)^\gamma, \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.3)$$

donde el término $(m - k)^\gamma$ recoge el efecto que provoca la concentración de capital y B es una constante que representa el estado de la tecnología. En este caso la ecuación de movimiento del capital es:

$$k_{t+1} = h(k_t) = \frac{s \cdot Bk^\beta (m - k_t)^\gamma}{(1 + n)}$$

Para valores positivos de los parámetros β y γ la función $h(k_t)$ es unimodal, donde el único máximo k^* es

$$k^* = \frac{\beta}{\beta + \gamma} m \quad (2.4)$$

A continuación demuestra que existen valores del parámetro B para los cuales la dinámica del sistema puede ser caótica.

En primer lugar define el máximo nivel alcanzable del capital per cápita

$$k^m = f(k^*) = \frac{s \cdot B}{(1+n)} \beta^\beta \gamma^\gamma \left(\frac{m}{\beta + \gamma} \right)^{\beta + \gamma}$$

Como k^m depende de B y k^* no, según incrementamos B la función se va estrechando hacia arriba mientras el valor de k^* permanece constante. Para valores suficientemente pequeños de B , la situación es la representada en la figura 2.2, donde las órbitas del sistema convergen al estado estacionario k^s .

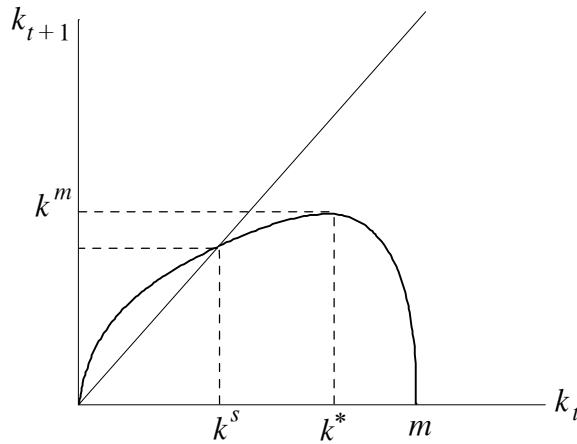


Figura 2.2.

Sin embargo, según el parámetro B aumenta, k^s y k^m también lo hacen hasta que llega un momento en que debe cumplirse $k^m = k^* = k^s$. Éste es un punto de bifurcación en el que la dinámica se torna cíclica y el equilibrio k^s es inestable, $|f'(k_s)| > 1$. Para eliminar la posibilidad de obtener valores negativos en k_t , imponemos $k^m \leq m$. Por tanto, para valores de los parámetros que cumplan $k^* < k^m \leq m$ y valores grandes de B , debe llegar un momento en el que aparecen oscilaciones acotadas. Para analizar si pueden aparecer órbitas caóticas Day estudia si existen valores de los parámetros que satisfacen las condiciones suficientes enunciadas en el teorema

de Li-Yorke.

Para ello, elige un valor de B , que llamamos B_1 , para el cual se cumple $k^m = m$. Por la ecuación (2.5) sabemos que en este caso, $k^* < k^m$. Esta situación sería la representada en la figura 2.3.

Por otro lado, es sencillo comprobar en el gráfico que la ecuación $k^* = h(k_t)$ tiene como solución dos raíces positivas. Sea k^c la menor de esas raíces, entonces se tiene que

$$0 < k^c < k^* < k^m = m$$

y

$$h(k^c) = k^*, \quad h(k^*) = k^m = m, \quad h(k^m) = h(m) = 0$$

es decir, se cumplen las condiciones del teorema de Li-Yorke y el sistema se comporta de manera caótica (veáse figura 2.3) para $B = B_1$.

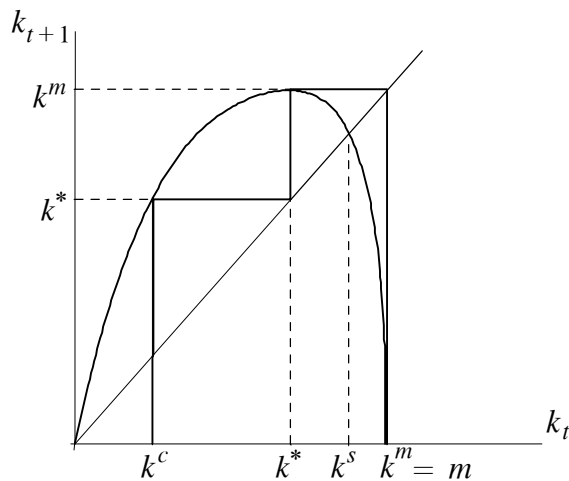


Figura 2.3.

Finalmente, como el diagrama de fases puede estrecharse de forma continua, es fácil observar en la figura 2.3 que existe un valor menor de B , B_0 , tal que para todo

valor de B en el intervalo $[B_0, B_1]$ existe un k^c que cumple

$$0 \leq \frac{\sigma B}{(1+n)} k^{m\beta} (m - k^m)^\gamma \leq k^c < k^* < k^m$$

Para todos estos valores de B , la dinámica del sistema es caótica.

Day desarrolla otras modificaciones de las hipótesis de Solow (tasa de ahorro variable, crecimiento restringido). Todas ellas dan lugar a dinámicas del capital per cápita $k_{t+1} = h(k_t)$, generadas por una función h unimodal (en vez de una función estrictamente decreciente como en el modelo original), similar al ejemplo que acabamos de revisar, y de nuevo utilizando el teorema de Li-Yorke demuestra la aparición de caos. La importancia de este trabajo pionero es que muestra cómo un modelo tan simple como el de Solow con ligeras modificaciones en sus hipótesis originales, es capaz de producir comportamientos dinámicos tan complejos, y distintos de la habitual convergencia monótona al estado estacionario estable.

En un trabajo más reciente, Böhm y Kaas (2000) demuestran la existencia de caos topológico en el modelo de Solow en tiempo discreto cuando las propensiones al ahorro de dos tipos de agentes (trabajadores y accionistas) son ligeramente distintas.

2.2 Modelo de Crecimiento Óptimo

A principio de los ochenta surgieron una serie de trabajos dedicados a demostrar que el comportamiento optimizador de los agentes y la existencia de mercados competitivos eran compatibles con la obtención de dinámicas complejas. Partiendo del modelo de crecimiento óptimo neoclásico (Ramsey, 1928; Cass, 1965; Koopmans, 1965) estudian las condiciones que deben de cumplirse para la aparición de caos. Estos primeros trabajos se centran en el estudio de modelos en tiempo discreto y para ello reescriben el modelo de crecimiento óptimo en tiempo discreto, donde el análisis resulta mucho más sencillo.

El problema de crecimiento óptimo en tiempo discreto viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MAX.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad k_{t+1} = f(k_t) - c_t + (1 - \delta)k_t \\ \quad k(0) = k_0 \in K \\ \quad 0 \leq c_t \leq f(k_t) \\ \quad k_t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

donde $u(c)$ y $f(k)$ son las funciones de utilidad y producción neoclásicas respectivamente, K es el conjunto de stocks de capital factibles y $\rho \in (0, 1)$ el factor de descuento. El resto de las variables tienen su significado habitual y están expresadas en términos per cápita.

A partir de la ecuación de estado el consumo per cápita se puede escribir en función de k_t y k_{t+1} :

$$c_t = g(k_t, k_{t+1}) = f(k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t$$

y:

$$u(c_t) = u(g(k_t, k_{t+1})) = V(k_t, k_{t+1})$$

Luego el problema de crecimiento óptimo anterior es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MAX.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t V(k_t, k_{t+1}) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad (k_t, k_{t+1}) \in D \\ \quad k(0) = k_0 \in K \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Este problema junto con las hipótesis neoclásicas sobre las funciones de utilidad

y producción describen el modelo neoclásico de crecimiento óptimo. Dichas hipótesis producen los siguientes supuestos sobre V y D :

A. El conjunto de stocks de capital factibles $K \subset \mathbb{R}_+^n$ es convexo, compacto y no vacío. $D \subset K \times K$ es un conjunto compacto y convexo en \mathbb{R}^2 .

$D = \{(k_t, k_{t+1}), 0 \leq k_t \leq L, 0 \leq k_{t+1} \leq t(k_t)\}$, donde $t(k_t)$ es una función cóncava no decreciente definida en $[0, L]$ con $t(L) = L$ y $t(k_t) > k_t$ en el interior de D .

B. La función $V : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 . V es estrictamente cóncava, creciente en k_t y decreciente en k_{t+1} , es decir, la función V cumple lo siguiente

$$V_{k_t} > 0, V_{k_{t+1}} > 0, V_{k_t k_t} < 0, V_{k_{t+1} k_{t+1}} < 0, V_{k_t k_t} V_{k_{t+1} k_{t+1}} - V_{k_t k_{t+1}}^2 > 0.$$

La trayectoria óptima del problema (2.6) puede determinarse iterando una función $h_\rho(k)$, denominada “función de política”, de K en K tal que: $k_1 = h_\rho(k_0), k_2 = h_\rho(k_1), \dots$. Para calcular esta función se utilizan técnicas de *programación dinámica*. Esta teoría fue desarrollada en los años cincuenta por un matemático americano, Richard Bellman, y está especialmente indicada para resolver problemas de optimización en tiempo discreto. No vamos a exponerla en detalle, pero sí vamos a resumir los resultados necesarios para resolver el problema (2.6).

El método de Bellman se basa en que la secuencia óptima (k_1^*, k_2, \dots) tiene la propiedad de que si se resuelve el problema (2.6) desde $t = i$:

$$W_\rho(k_i) = \max \left\{ \sum_{t=i}^{\infty} V(k_t, k_{t+1}) \rho^{t-i}, \text{ s.a. } (k_t, k_{t+1}) \in D, k(i) = k_i \right\}$$

los k restantes (desde $t = i$ hasta cero), deben constituir una secuencia óptima de decisiones para el problema que queda con k_i como condición final. Luego si:

$$W_\rho(k_{i+1}) = \max \left\{ \sum_{t=i+1}^{\infty} V(k_t, k_{t+1}) \rho^{t-(i+1)}, \text{ s.a. } (k_t, k_{t+1}) \in D, k(i+1) = k_{i+1} \right\}$$

podemos calcular $W_\rho(k_i)$ como:

$$W_\rho(k_i) = \max \{V(k_i, k_{i+1}) + \rho W_\rho(k_{i+1}), \text{ s.a. } (k_i, k_{i+1}) \in D, k(i+1) = k_{i+1}\} \quad (2.7)$$

es decir, podemos resolver etapa por etapa recursivamente hacia atrás, tomando como condición inicial el k inmediatamente posterior. El proceso de decisión de infinitas etapas se reduce a infinitos procesos de decisión de una sola etapa. La ecuación (2.7) se conoce como *ecuación de Bellman*. En general, si definimos $W_\rho(k_0) = \max \sum_0^\infty \rho^t V(k_t, k_{t+1})$ s.a. $(k_t, k_{t+1}) \in D, k(0) = k_0, W_\rho(\cdot)$ satisface:

$$W_\rho(k_t) = \max \{V(k_t, k_{t+1}) + \rho W_\rho(k_{t+1}), \text{ s.a. } (k_t, k_{t+1}) \in D, k_t \in K\} \quad (2.8)$$

A partir de la ecuación de Bellman podemos calcular la función de política $h_\rho(k)$. La definición formal de esta función es:

$$h_\rho(k_t) = \arg \max \{V(k_t, k_{t+1}) + \rho W_\rho(k_{t+1}), \text{ s.a. } (k_t, k_{t+1}) \in D, k_t \in K\}$$

El comportamiento dinámico de $h_\rho(k_t)$, para V y D dados, depende del factor de descuento temporal ρ . El paso siguiente es analizar este comportamiento para distintos valores de ρ .

Como señalamos en la introducción, el resultado dinámico que mejor se ajustaba a la teoría neoclásica era la convergencia del sistema a un único equilibrio estable. Ésta es la razón por la que inicialmente, dados V y D que satisfacen los supuestos A y B , se buscaron los valores del factor de descuento para que la función $h_\rho(k_t)$ tuviese un único punto fijo estable. El principal resultado relacionado con esta cuestión lo encontramos en el teorema de “turnpike” (Scheinkman, 1976) según el cual $h_\rho(k_t)$ tiene un único punto fijo globalmente atractivo para valores suficientemente altos (cerca de uno) del factor de descuento.

En la medida que para valores muy pequeños del factor de descuento el stock de capital se dedica únicamente a producir bien de consumo, es decir, $h_\rho(k) = 0$ cuando $\rho \rightarrow 0$ (Deneckere y Pelikan, 1986), quedaba por responder la cuestión de cuál es el comportamiento dinámico cuando el valor del factor de descuento no es “ni muy grande ni muy pequeño”. Esta cuestión fue resuelta por Boldrin y Montruchio¹⁵ (1986) en el denominado teorema “anti-turnpike”, según el cual cualquier sistema dinámico discreto puede ser resultado de un problema de control óptimo. En concreto, dada una dinámica cualquiera se pueden encontrar una función V , un conjunto D , que cumplen los supuestos A y B , y un factor de descuento capaces de generar dicha dinámica. Luego el comportamiento dinámico caótico puede ser solución del problema de optimización neoclásico.

Los primeros en analizar otro tipo de comportamiento dinámico en los modelo de crecimiento óptimo distinto a la convergencia al estado estacionario fueron Benhabib y Nishimura (1984). En este trabajo analizan las condiciones bajo las cuales aparecen ciclos de período dos. En primer lugar muestran que, dado $(k_t, k_{t+1}) \in D$ un punto de $h_\rho(k_t)$, si $V_{k_t k_{t+1}} < 0$, la función $h_\rho(k_t)$ es creciente en k_t y si $V_{k_t k_{t+1}} > 0$, la función $h_\rho(k_t)$ es decreciente en k_t . Demuestran además que para $V_{k_t k_{t+1}} < 0$ las trayectorias del sistema convergen a un ciclo de período dos, mientras que para $V_{k_t k_{t+1}} > 0$, las trayectorias del sistema convergen al estado estacionario.

Para interpretar estos resultados en términos económicos construyen una economía con dos sectores, uno dedicado a producir bien de consumo y otro a producir bien de inversión¹⁶. En la producción de ambos se emplea factor trabajo y capital físico. Demuestran que cuando el sector de bienes de inversión es capital intensivo $V_{k_t k_{t+1}} > 0$, y un aumento de k hoy hace óptimo tener un mayor stock de capital mañana. Sin embargo, si el sector de bien de consumo es el capital intensivo

¹⁵Resuelven lo que más adelante denominaremos *problema inverso* (Carrera y Morán, 1995).

¹⁶El problema de control óptimo 2.5 se puede formular en términos de una economía con dos

$V_{k_t k_{t+1}} < 0$ y un aumento de k hoy hace óptimo un menor stock de capital mañana¹⁷.

En este trabajo pionero no se estudia la aparición de caos, pero a partir de sus resultados se desarrollan una serie de trabajos que se encargan de ello (Boldrin y Montrucchio, 1986; Deneckere y Pelikan, 1986; Boldrin, 1986). Como se muestra en todos ellos y ya señalaron Benhabib y Nishimura (1984), para la obtención de órbitas de períodos mayor que dos es necesario eliminar el supuesto de concavidad de la función $V_{k_t k_{t+1}}$. En concreto demuestran que es necesario que $V_{k_t k_{t+1}}$ cambie de signo en D . Deneckere y Pelikan (1986) lo demuestran en el siguiente teorema:

Teorema 13 *Suponiendo que:*

- (i) *Existe $k_t = \phi(k_{t+1})$ tal que $0 < \phi(k_{t+1}) < 1$ para $0 \leq k_{t+1} \leq 1$*
- (ii) *V está definida en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $V_{k_t k_{t+1}} > 0$ si $k_t < k_{t+1}$, $V_{k_t k_{t+1}} < 0$ si $k_t > k_{t+1}$*
- (iii) *Existe ρ en $(0, 1)$ tal que $0 = h_\rho(0) = h_\rho(1)$ y $h_\rho(k_1) = 1$, donde $k_1 = \phi(1)$*

Entonces existe un intervalo abierto J que contiene a ρ con la propiedad de que $\beta \in J$ implica que $h_\rho(k)$ tiene un punto de periodo tres, y por tanto tiene dinámicas complejas en el sentido de Li-Yorke.

La hipótesis (i) implica que la dinámica del sistema itera la función en el intervalo $(0, 1)$ y la hipótesis (ii) que $h_\rho(k_t)$ es unimodal. Ya hemos visto que, para esta familia

sectores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MAX.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t) \\ \text{sujeto a:} \\ c_t \leq f^1(k_t^1, l_t^1) \\ k_{t+1} \leq f^2(k_t^2, l_t^2) \\ l_t^1 + l_t^2 \leq L \\ k_t^1 + k_t^2 \leq k_t \\ k(0) = k_0 \end{array} \right.$$

donde los superíndices 1, 2 corresponden a las funciones de producción y factores productivos correspondientes a la producción de bien de consumo y bien de inversión respectivamente. Los supuestos sobre las funciones de utilidad y de producción son los mismos que los del problema 2.5.

¹⁷Este resultado es similar al del teorema de Rybczynski.

de funciones existen valores de los parámetros para los cuales aparece un ciclo de período tres y por tanto la dinámica es caótica¹⁸. La mayor parte de los trabajos consideran supuestos sobre V y D que dan lugar a que $h_\rho(k_t)$ sea la ecuación logística.

Para interpretar estos resultados en términos económicos consideran de nuevo una economía con dos sectores. El hecho de que la aparición de caos esté relacionada con el cambio factor-intensidad entre los distintos sectores de la economía, determina que dichos comportamientos no sean posibles en modelos de crecimiento neoclásicos con un sólo sector¹⁹. Para valores grandes de k el sector de bien de consumo es más intensivo en capital que el de bienes de capital, mientras que para valores pequeños de k ocurre lo contrario. La relación factor-intensidad cambia entre los dos sectores para un valor (crítico) \bar{k} y determina que para valores de k mayores (menores) que \bar{k} , la economía encuentra rentable producir bienes de consumo (producir bienes de capital). En el primer caso la función $h_\rho(k)$ es decreciente en k mientras que en el segundo es creciente y la $h_\rho(k)$ que resulta es unimodal.

Dependiendo del valor del factor de descuento $h_\rho(k)$ presenta distintos comportamientos dinámicos, desde convergencia a un estado estacionario o ciclos de diferentes períodos finitos, hasta caos. El tipo de comportamiento, depende del patrón de inversión, es decir, del hecho de que la economía encuentre rentable producir bienes de consumo o producir bienes de capital. Esta rentabilidad viene dada por el factor de descuento.

Demuestran que el teorema anterior se cumple y la dinámica de $h_\rho(k)$ es caótica para valores del parámetro ρ suficientemente pequeños²⁰. Este resultado, como veremos, es común a todos los trabajos y ha sido objeto de crítica al considerarse valores poco realistas.

¹⁸El teorema establece las mismas condiciones sobre la función $h_\rho(k)$ que las del trabajo de Day (1982) ya que su gráfica se corresponde con la figura 2.2.

¹⁹Sin embargo, como veremos más adelante, si se alteran algunos de los supuestos originales, es posible obtener comportamientos caóticos en modelos de un sólo sector.

²⁰Deneckere y Pelikan (1986) obtienen que dadas las hipótesis (i) y (ii) y que $\frac{|V_2(x_1,1)|}{|V_1(1,0)|} \leq \rho < 1$, donde x_1 cumple $h(x_1) = 1$, la dinámica es caótica con $\rho = \frac{\min\{|V_2(1,0)|, |V_2(0,0)|\}}{|V_1(0,0)|}$.

Aunque la mayoría de estos trabajos centran su análisis en la existencia de caos topológico en algunos de ellos se estudia también la existencia de “caos observable”. Boldrin (1986) considera la siguiente definición:

Definición 7 $h_\rho : K \rightarrow K$ tiene caos observable si existe una medida μ en K que es invariante con respecto a h_ρ , absolutamente continua y ergódica

y demuestra cómo bajo los supuestos del teorema 11 y la hipótesis de que la derivada Schwartziana de h_ρ sea negativa en K para ρ suficientemente pequeño, el sistema dinámico h_ρ exhibe caos ergódico.

Para demostrar que h_ρ cumple la anterior definición es necesario conocer la forma funcional de h_ρ . Como en la mayoría de las aplicaciones se desconoce la forma de esta función los trabajos se limitan a mostrar algunos ejemplos de funciones V que lo cumplen. Por ejemplo, Deneckere y Pelikan (1986) muestran un ejemplo de función V que da lugar a una función de política logística con comportamiento caótico: $h_\rho(k) = 4k(1 - k)$, cuando $\rho = 0.01$ y $0 \leq k \leq 1$. Además señalan que la función h_ρ tiene una medida invariante ergódica y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue (la densidad de la medida es $1/\pi\sqrt{k(1-k)}$) y presenta sensibilidad a las condiciones iniciales (el exponente de Lyapunov es $\log 2$).

Por último, existen una serie de trabajos más actuales, que demuestran la aparición de caos en modelos neoclásicos de crecimiento óptimo discreto calculando la *entropía topológica* del sistema dinámico. De manera sencilla la entropía topológica se define como la tasa a la que diferentes trayectorias son “distinguibles” cuando el número de observaciones N (el paso del tiempo) aumenta:

$$\kappa(h, A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \kappa_\varepsilon(h, A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \delta_{\varepsilon, N}(h, A)}{N}$$

donde $\kappa_\varepsilon(h, A)$ se define como la tasa crecimiento exponencial del número de trayectorias en un conjunto $A \subseteq D$ compacto e invariante ε – *distinguibles* cuando la

longitud de las trayectorias tiende a $+\infty$, y $\delta_{\varepsilon,N}(g, A)$:

$$\delta_{\varepsilon,N}(g, A) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{número máximo de puntos dentro de } A: \\ \text{tras } N \text{ períodos sus órbitas están } \varepsilon - \textit{separadas}. \end{array} \right\}$$

Si $\kappa > 0$ y además es suficientemente “grande” se toma como definición de dinámica complicada y existe alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Montrucchio y Sorger (1996) muestran que de nuevo existe una fuerte relación entre el comportamiento dinámico complejo (medido por la entropía topológica de las sendas óptimas) y el factor de descuento. En concreto demuestran que:

$$\kappa(h, A) \leq -(\ln \rho)c_+(A)$$

donde $c_+(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \delta_{\varepsilon,1}(h,A)}{-\ln \varepsilon}$.

Para valores del factor de descuento suficientemente pequeños la entropía es arbitrariamente grande lo que implica que la dinámica es complicada. Montrucchio (1994) resuelve el problema a la inversa, y demuestra que si la dinámica es muy complicada la entropía es muy grande y el factor de descuento tiene que ser muy pequeño.

En general, en los primeros trabajos que estudian la aparición de comportamientos complejos el factor de descuento debe ser tan pequeño para la aparición de caos, que como hemos comentado, muchos autores lo consideran irrealista. Sin embargo, sus defensores señalan que en la medida que el valor de ρ necesario para la obtención de caos esta condicionado por los supuestos realizados sobre las funciones de producción y de utilidad (supuestos A y B sobre las funciones V y D) y el tipo de mercado (competencia perfecta), es posible relajar estos supuestos de manera que obtengamos cualquier tipo de dinámica, independientemente del valor que tome ρ . Veamos dos ejemplos.

Boldrin (1986) muestra que relajando los supuestos sobre la tecnología y la función de utilidad, los valores del factor de descuento para los cuales aparece caos en modelos de crecimiento con dos sectores son más realistas. En concreto, considera que u es lineal y que el grado de sustitución entre factores (medido por la elasticidad de sustitución) es pequeño. Además, a diferencia de los primeros modelos, supone que la producción de bienes de consumo e inversión siguen distintos procesos productivos. La tecnología de bien de consumo es CES y la de bien de capital es Leontief. Con estos supuestos obtiene que no es necesario que el factor de descuento sea muy pequeño para obtener caos. En general, la obtención de caos no depende de este tipo de tecnología concreta, pero parece importante que la elasticidad de sustitución sea pequeña para que ocurra el cambio de la relación factor intensidad²¹.

En el caso discreto los valores más realistas del factor de descuento aparecen cuando se relajan los supuestos de competencia imperfecta, mercados completos u otros tipos de eficiencia. En estos casos las condiciones necesarias para la aparición de dinámicas caóticas son mucho menos restrictivas y el caos aparece en modelos de un sólo sector. Además en estos trabajos se pueden aplicar con mayor facilidad las condiciones para demostrar la existencia de caos observable.

Por ejemplo, Woodford (1988), muestra cómo en un modelo de un sólo sector donde los agentes no pueden pedir prestado, puede aparecer caos observable. En el modelo existen dos tipos de agentes, trabajadores: ofrecen factor trabajo a cambio de una renta salarial y la dedican íntegramente a consumir, y empresarios: son los propietarios del capital, se ocupan del proceso productivo y dedican una proporción $(1 - \beta)$ de su riqueza actual al consumo y el resto al ahorro. Como los trabajadores no pueden ahorrar, los empresarios financian sus proyectos de inversión con su propia riqueza. El stock de capital en cada período es igual a la proporción de su riqueza

²¹Boldrin y Deneckere (1987) también muestran cómo el factor de descuento aumenta cuando decrece el grado de sustituibilidad entre factores.

en el período anterior que no dedicó a consumir, es decir, a su ahorro:

$$k_{t+1} = \beta k_t r(v(k_t))$$

donde $r(v(k_t))$ es el máximo rendimiento posible para los propietarios del capital y $v(k_t)$ es la oferta óptima de trabajo. La ecuación anterior determina la evolución temporal del stock de capital y es un caso especial de las dinámicas analizadas por Day (1982), con la diferencia de que ésta se ha obtenido a partir de un problema de optimización. Woodford supone que la tecnología de producción F es Leontief:

$$F(k, n) = \begin{cases} ak - bk^2/2n & \text{para } k/n \leq a/b, \\ a^2n/2b & \text{para } k/n \geq a/b \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $r(v(k_t)) = F_k$:

$$k_{t+1} = f(k) = \begin{cases} \beta(ak - bk^2) & \text{para } k \leq a/b, \\ 0 & \text{para } k \geq a/b \end{cases} \quad (2.9)$$

Transformando las variables, $x_t = (b/a)k_t$, (2.9) se convierte en la ecuación logística $x_{t+1} = \beta a x_t(1 - x_t)$. Como ya sabemos para todos los valores de βa entre el valor crítico 3.57 y 4 la dinámica es caótica. Este resultado nos dice que para algunas condiciones iniciales es posible la existencia de trayectorias caóticas, pero no garantiza que podamos observar dichas trayectorias. Así, puede ocurrir que el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias caóticas tenga medida cero. Por esta razón, Woodford lleva a cabo el análisis de la existencia de caos observable. Para ello utiliza el teorema 10 que presentamos en la sección anterior. A partir de él deriva las condiciones suficientes para que la dinámica sea caótica y observable. Obtiene que estas condiciones se satisfacen para un conjunto abierto de valores de los parámetros y que se cumplen independientemente del valor que

tome el factor de descuento. No obstante, sigue siendo necesario que el grado de sustitución entre capital y trabajo no sea alto.

A partir de los trabajos pioneros se han desarrollado multitud de trabajos que demuestran la existencia de caos topológico (Mitra, 1996; Nishimura y Yano, 1996) y ergódico (Nishimura et al., 1994; Nishimura y Yano, 1995) en el modelo de crecimiento óptimo con dos sectores. Para ello elaboran condiciones bajo las cuales la función de política es unimodal y expansiva. De nuevo la aparición de caos está relacionada con el cambio de factor intensidad en los sectores, valores pequeños de factor de descuento y bajo grado de sustitución entre factores. Distintas extensiones del modelo de crecimiento neoclásico estudian la existencia de caos introduciendo el capital en la función de utilidad (Majumdar y Mitra, 1994) o endogeneizando la tasa de crecimiento de la población (Prskawetz y Feichtinger, 1995). Otros trabajos, sin llegar a demostrarlo, se preguntan sobre la posibilidad de obtener caos cuando se introduce el ocio en la función de utilidad (Hek, 1998).

Al principio hemos señalado que el estudio de la obtención de dinámicas complejas se ha llevado a cabo en modelos de tiempo discreto debido a que en tiempo continuo el análisis es mucho más complejo, al ser necesaria una mayor dimensión para la aparición de caos. Sin embargo, la obtención de dinámicas caóticas es posible en modelos en tiempo continuo y se demuestra a partir de los resultados obtenidos para el caso discreto (Boldrin y Montrucchio, 1989). McKenzie (1976) y Rockafellar (1976) desarrollan el teorema turnpike para tiempo continuo y muestran cómo el factor de descuento está relacionado con la forma del Hamiltoniano, el cual depende de la tecnología y las preferencias. Montrucchio (1987) demuestra el teorema anti-turnpike para tiempo continuo a partir del caso discreto. De nuevo, cuanto menor es el factor de descuento más probable la aparición de dinámicas complejas en tiempo continuo.

2.3 Modelo de Generaciones Sucesivas

Los primeros trabajos dedicados a estudiar bajo qué condiciones aparece caos en modelos de generaciones sucesivas (OLG) son los de Benhabib y Day (1982) y Grandmont (1985). El primero de ellos estudia la aparición de dinámicas caóticas en el “caso clásico” del modelo OLG sin producción (Gale, 1973), donde la generación joven pide prestado a la generación vieja. El segundo realiza el mismo tipo de análisis para el “caso Samuelson” donde la generación joven presta a la generación vieja (Samuelson, 1958). A continuación revisamos ambos trabajos.

Benhabib y Day suponen que todos los consumidores de una misma generación son idénticos y se considera una generación representativa que vive dos períodos. Cada consumidor recibe una dotación w_0 cuando es joven y w_1 cuando es vieja. Sus preferencias vienen representadas por una función de utilidad $U(c_0(t), c_1(t+1))$, donde $c_0(t)$ y $c_1(t+1)$ son sus consumos en el primer y en el segundo período respectivamente. La tasa de interés (factor de descuento) en t ρ_t , definida como la tasa de intercambio entre consumo presente y futuro, determina la restricción presupuestaria:

$$c_1(t+1) = w_1 + \rho_t [w_0 - c_0(t)], \quad c_0(t) \geq 0, \quad c_1(t+1) \geq 0 \quad (2.10)$$

Suponiendo que la población crece a una tasa γ la condición de equilibrio de mercado (ahorro igual a inversión) viene dada por:

$$(1 + \gamma) [w_0 - c_0(t)] + w_1 - c_1(t) = 0$$

Cuando es joven el consumidor elige en t sus consumos en el primer y segundo período, maximizando $U(c_0(t), c_1(t+1))$ sujeto a su restricción intertemporal (2.10). Un equilibrio de intercambio puro para esta economía es una sucesión $\{\rho_t, c_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que $c_0(t)$ es solución del problema de maximización individual, dado ρ_t y la

condición de equilibrio de mercado²².

Se consideran los siguientes supuestos:

1. La función de utilidad de la generación representativa es estrictamente cóncava, dos veces diferenciable, creciente en sus argumentos y separable (neoclásica).
2. Para todos los precios a lo largo de la senda de equilibrio la solución siempre es interior (se garantiza si la función de utilidad cumple las condiciones de Inada).

Bajo estos supuestos la condición de primer orden del problema de maximización de U sujeto a (2.10) se reduce a que en equilibrio la tasa de interés es igual a la relación marginal de sustitución entre los dos consumos:

$$\rho_t = \frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))}$$

donde U_0 y U_1 son las derivadas parciales de U . Sustituyendo esta expresión en (2.10) tenemos:

$$\frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))} = \frac{w_1 - c_1(t+1)}{c_0(t) - w_0} \quad (2.11)$$

A continuación los autores tratan de reducir la expresión anterior a una ecuación en diferencias en $c_0(t)$ o en $c_1(t+1)$ empleando el siguiente resultado (Gale, 1973):

Lema 1 *En el caso clásico bajo los supuestos 1 y 2 la ecuación (2.11) se puede escribir en la forma*

$$c_1(t+1) = G(c_0(t); w_0, w_1)$$

²²Si no hay petición de préstamos en el primer período, no hay nunca.

Definen la relación marginal de sustitución restringida (CMRS):

$$\frac{U_0(c_0(t), c_1(t+1))}{U_1(c_0(t), c_1(t+1))} = V(c_0(t); w_0, w_1) \quad (2.12)$$

donde la función V da el valor del factor de descuento en el óptimo dada la restricción presupuestaria y la condición de primer orden .

Combinando (2.12) con la condición de equilibrio de mercado, obtenemos la ecuación en diferencias:

$$c_0(t+1) = g(c_0(t)) = w_0 + \frac{1}{1+\gamma} V(c_0(t); w_0, w_1) (c_0(t) - w_0) \quad (2.13)$$

que genera el comportamiento dinámico del consumo.

El comportamiento cualitativo de estas trayectorias depende de la tasa marginal de sustitución, que viene determinada por el tipo de función de utilidad que se considere. Benhabib y Day se preguntan qué características debe tener U para que las trayectorias sean caóticas en el sentido de Li-Yorke. Para ello es necesario introducir la *condición suficiente de sustituibilidad (SCC)*. La función de utilidad cumple (SCC) si existe un $\hat{c} > w_0$ tal que:

$$(i) \alpha_1 = \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) V(\hat{c}) > 1$$

$$(ii) \alpha_2 = \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) V(\alpha_1 \hat{c} + (1 - \alpha_1) w_0) > 1$$

$$(iii) 0 < \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) V(\alpha_1 \alpha_2 \hat{c} + (1 - \alpha_1 \alpha_2) w_0) \leq 1$$

La figura (2.4) representa la SCC donde el factor de descuento se relaciona con su correspondiente nivel de consumo presente:

Como podemos observar el cumplimiento de SCC determina que cuando el consumo es bajo, el factor de descuento es muy alto (los consumidores están dispuestos a sacrificar mucho consumo futuro por una pequeña cantidad de consumo presente),

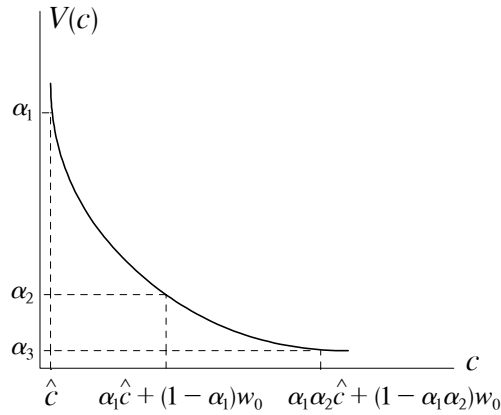


Figura 2.4.

pero que éste decrece sustancialmente cuando el consumo aumenta. En términos de la función de utilidad la SCC requiere un alto grado de concavidad para que la RMS varíe lo suficiente²³. Para demostrar el teorema analizan la existencia de ciclos de periodo 3 y a partir de la condición SCC demuestran formalmente que existe un $c_0 \in J$ tal que $g^3(c_0) \leq c_0 < g(c_0) < g^2(c_0)$.

Teniendo en cuenta esta condición enuncian su principal resultado:

Teorema 14 *Bajo los supuestos 1 y 2 y suponiendo que $V(c_0(t); w_0, w_1)$ cumple la condición suficiente de sustituibilidad (SSC), la ecuación en diferencias (2.13) es caótica en el intervalo $J = \left(w_0; w_0 + \frac{w_1}{1+\gamma} \right)$.*

La aparición del ciclo de período tres está relacionada con la condición SCC. Esta condición determina un cambio de regímenes en los niveles de consumo y tasas de interés que en última instancia garantiza la aparición del ciclo de período tres. Goodwin y Pacini (1992) lo explican con el siguiente argumento intuitivo. Supongamos que la RMS en un determinado período t es muy alta. En este caso la generación joven en t financia un pequeño exceso de demanda a expensas de un gran exceso de oferta en el siguiente período (el número de unidades que renuncio en el futuro por

²³Los autores señalan que en general es fácil encontrar funciones de utilidad que la satisfacen y muestran algunos ejemplos ($U(c_0, c_1) = u(c_0) + c_1$).

consumir algo en el presente es alto), lo que implica que la nueva generación joven tendrá un mayor consumo disponible que la anterior ($w_1 + \rho_t [w_0 - c_0(t)] > c_0(t)$). Para consumir esta cantidad en el presente la segunda generación de jóvenes tendrá un exceso de oferta cuando sea viejo aún mayor que la anterior generación a pesar de tener un ρ_t menor. La tercera generación de jóvenes tendrá un consumo disponible aún mayor (su dotación más el exceso de oferta de la segunda generación) y sólo están dispuestos a aceptarlo a una tasa de interés negativa. Cuando esto ocurra el exceso de oferta de esta generación seguirá siendo positivo (se supone que una vez que se comienza en el caso clásico se continúa siempre en él) pero más pequeño, de manera que la siguiente generación dispondrá de un menor nivel de consumo y ρ_t volverá a ser mayor que el de la situación inicial. Este cambio en el patrón de consumo determina la aparición del ciclo de período 3 y para que ocurra es necesario que la RMS varíe lo suficiente (según aumenta el consumo presente) para que llegue un momento en el que el decrecimiento de ésta compense los crecientes aumentos de los excesos de oferta. La función que describe la dinámica del consumo $g(c_0(t))$, en este caso, es estrictamente convexa.

Grandmont realiza el mismo tipo de análisis que acabamos de describir para el “caso Samuelson” donde ahora es la generación joven la que presta a la generación vieja. En él, como veremos, la clave para obtener caos está en el conflicto entre los efectos sustitución y renta intertemporales.

Se supone que todos los agentes son idénticos y viven dos períodos. Existe un bien de consumo que es producido con el trabajo ofrecido por los consumidores en un mercado competitivo. La producción de una unidad del bien requiere una unidad de trabajo y en equilibrio el salario real es igual a uno.

Si cada agente tiene una dotación de trabajo en cada período (l_1^*, l_2^*) y su oferta de trabajo es (l_1, l_2) , su consumo de ocio viene dado por $(l_1^* - l_1, l_2^* - l_2)$. Las preferencias del consumidor vienen representadas por una función de utilidad separable

intertemporal $U = U_1(c_1, l_1^* - l_1) + U_2(c_2, l_2^* - l_2)$, continua, creciente y estrictamente cóncava, con $l_1^* > 0$ y $l_2^* > 0$. Los jóvenes pueden ahorrar parte de su renta y lo hacen manteniendo su riqueza en forma de dinero. El stock de dinero se supone constante.

Cada agente cuando es joven elige en t su consumo presente $c_1 \geq 0$, su oferta de trabajo $0 \leq l_1 \leq l_1^*$, su demanda de dinero m en el presente, su consumo futuro $c_2 \geq 0$ y su oferta de trabajo futura $0 \leq l_2 \leq l_2^*$ que maximizan su función de utilidad intertemporal, sujeto a las restricciones presupuestarias:

$$p(c_1 - l_1) + m = 0 \quad \text{y} \quad p^e(c_2 - l_2) = m \quad (2.14)$$

donde p es indistintamente el precio del bien de consumo y el salario, y p^e es el precio esperado por la generación joven en el siguiente periodo²⁴. Bajo los supuestos considerados sobre la función de utilidad el problema tiene una única solución.

Los valores óptimos de $(c_1 - l_1)$ y $(c_2 - l_2)$ dependen de la tasa de intercambio intertemporal $\theta = \frac{p}{p^e}$. Como una unidad de trabajo produce una unidad de bien, estos valores pueden ser interpretados como los excesos de demanda actuales (ahorro) y esperados que denotamos por $z_1(\theta) = (c_1 - l_1)$ y $z_2(\theta) = (c_2 - l_2)$ respectivamente. La demanda de dinero $m^d(p, p^e)$ viene dada entonces por:

$$m^d(p, p^e) \equiv -pz_1(\theta) \equiv p^e z_2(\theta) \quad (2.15)$$

lo que implica:

$$\theta z_1(\theta) + z_2(\theta) \equiv 0 \quad \text{para todo } \theta > 0 \quad (2.16)$$

²⁴Bajo previsión perfecta $p^e = p_{t+1}$ y en caso contrario p^e se estima como función del precio actual y los precios pasados. Grandmont analiza la existencia del equilibrio y su estabilidad cuando existe previsión perfecta y cuando no existe y los agentes llevan a cabo un proceso de aprendizaje. No vamos a tratar estas cuestiones y supondremos, como hace él en el resto del análisis, previsión perfecta.

La expresión anterior es la condición de equilibrio del mercado, es decir, los excesos de demanda de la generación joven más los planeados por la generación vieja en t deben ser igual a cero (el ahorro de los jóvenes debe ser igual al desahorro de los viejos).

Grandmont reescribe el modelo que acabamos de describir en términos de una economía de intercambio en vez de con producción, donde cada agente recibe una dotación del bien l_τ^* en cada período de su vida. La razón es que esto le permitirá, más adelante, establecer supuestos más precisos sobre la función de utilidad indirecta que derivándolos a partir de la función de utilidad original U .

Así, sea $V = V_1(a_1) + V_2(a_2)$ la función de utilidad indirecta aditiva y separable definida como el valor máximo de U sujeta a $a_\tau = c_\tau + (l_\tau^* - l_\tau)$, donde a_τ es la riqueza real del agente para $\tau = 1, 2$ que se considera dada. El problema que resuelve ahora el consumidor consiste en maximizar V con respecto a $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ y $m \geq 0$ sujeto a:

$$pa_1 + m = l_1^* \quad \text{y} \quad p^e a_2 = p^e l_2^* + m$$

y las elecciones óptimas de las variables son equivalentes a las que obtenemos al resolver el problema de optimización de la economía con producción (U sujeta a (2.14)).

La condición de primer orden del problema de maximización intertemporal de la economía de intercambio puede escribirse como:

$$\frac{V_1'(a_1(\theta_t))}{V_2'(a_2(\theta_t))} = \frac{p_t}{p_{t+1}} = \theta \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16) tenemos:

$$\frac{V_1'(a_1(\theta_t))}{V_2'(a_2(\theta_t))} z_1(\theta_t) = -z_2(\theta_t) \quad (2.18)$$

Los signos de $z'_1(\theta)$ y $z'_2(\theta)$ vienen determinados por los efectos sustitución y renta intertemporales. Si ρ_t aumenta, debido al efecto sustitución el consumo presente disminuye (al ser más caro relativamente), mientras que por el efecto renta aumenta (al ser ahorrador, su renta es mayor y se supone que c_1 es normal), de manera que sin más información el efecto total es ambiguo. En el caso en que domine el efecto sustitución $z'_1(\theta) < 0$ mientras que si domina el renta $z'_1(\theta) > 0$. El consumo futuro aumenta por lo dos efectos de manera que $z'_2(\theta) > 0$.

Para obtener un resultado sobre el signo de $z'_1(\theta)$ define el coeficiente relativo de aversión al riesgo:

$$R_\tau = \frac{-V''_\tau(a_\tau)}{V'_\tau(a_\tau)}(l_t - z_\tau), \quad \tau = 1, 2 \quad (2.19)$$

que además de medir el grado de aversión al riesgo, R_τ nos permite medir el grado de concavidad de cada V_τ .

Grandmont muestra que si $z'_1(\theta)$ cambia de signo la dinámica del modelo se torna cíclica y pueden aparecer ciclos de período mayor o igual a dos. Así, enuncia una serie de supuestos sobre el coeficiente R_τ que deben cumplirse para que el signo de $z'_1(\theta)$ cambie, en concreto, que exista un único $\theta^* > \bar{\theta}$ tal que $z'_1(\theta) < 0$ para $\bar{\theta} \leq \theta < \theta^*$, $z'_1(\theta^*) = 0$ y $z'_1(\theta) > 0$ para $\theta > \theta^*$. Demuestra que, para que esto suceda, es necesario que la concavidad de la función de utilidad de la generación vieja, medida por R_τ , sea mayor que uno para algún $a_2 > 0$.

Para explicar el hecho de que el cambio de signo provoque la aparición de ciclos estudia la curva de oferta del consumidor, esto es, combinaciones óptimas de consumo presente y futuro en función de ρ_t . Cuando el efecto sustitución domina, subidas de ρ_t provocan que el consumo presente disminuya y el futuro aumente, mientras que si es el renta el que domina la curva de oferta “se vuelve hacia atrás” (véase figura 2.5) y subidas de ρ_t provocan aumentos en ambos consumos:

La forma unimodal de la curva de oferta viene determinada por el conflicto entre

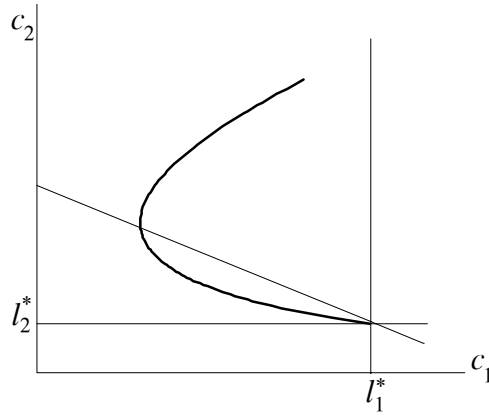


Figura 2.5.

los efectos sustitución y renta intertemporal y como muestra a continuación es el factor clave para la obtención de caos. Para ello Grandmont desarrolla todo el análisis formal para encontrar supuestos sobre las funciones de utilidad que generen comportamientos dinámicos caóticos. Vamos a resumirlo brevemente.

A partir de la condición de equilibrio del mercado se obtiene una ecuación en diferencias para θ :

$$\theta_{t-1} = z_2^{-1}(-z_1(\theta_t)) \equiv \varphi(\theta_t) \quad (2.20)$$

Demuestra que encontrar un equilibrio periódico de la economía es equivalente a encontrar una órbita periódica de $\varphi(\theta_t)$, y estudia el comportamiento dinámico del sistema a partir de esta ecuación en diferencias. Obtiene que los ciclos de período mayor o igual que dos aparecen siempre que exista un gran conflicto entre los efectos sustitución y renta intertemporales cuando ρ_t varía, de manera que la curva de oferta esté suficientemente curvada hacia atrás.

A continuación define la función $\chi = z_2 \circ \varphi \circ z_2^{-1}$, topológicamente conjugada a la función φ , de manera que ambas funciones describen la misma dinámica. Si definimos $\mu_t = z_2(\theta_{t-1})$ como el nivel de saldos reales de equilibrio mantenidos

por un consumidor representativo (véase ecuación (2.15)), haciendo un cambio de variable la ecuación (2.20) se transforma en:

$$\mu_t = z_2(\theta_{t-1}) = \frac{\mu_{t+1}}{z_2^{-1}(\mu_{t-1})} = \chi(\mu_{t+1}) \quad (2.21)$$

En la medida que φ y χ se deducen uno del otro mediante un cambio de variable reversible, ambos presentan el mismo comportamiento cualitativo. Este cambio de variable tiene la ventaja de trabajar directamente con las funciones de utilidad en vez de las funciones de exceso de demanda y permite estudiar las propiedades de las primeras cuando la dinámica es caótica.

La ecuación (2.18) puede ser reescrita como:

$$V_1'(l_1 - z_2(\theta_{t-1}))z_2(\theta_{t-1}) = V_2'(l_2 + z_2(\theta_t))z_2(\theta_t)$$

y realizando el cambio de variable $\mu_{t+1} = z_2(\theta_t)$:

$$\mu_t V_1'(l_1 - \mu_t) = \mu_{t+1} V_2'(l_2 + \mu_{t+1}) \quad (2.22)$$

que define implícitamente $\chi(\mu) = (v_1^{-1} \circ v_2)(\mu)$, donde las funciones v_1 y v_2 son:

$$v_1(\mu) = \mu V_1'(l_1 - \mu) \quad \text{para } \mu \text{ en } [0, l_1] \quad \text{y} \quad (2.23)$$

$$v_2(\mu) = \mu V_2'(l_2 + \mu) \quad \text{para todo } \mu \geq 0 \quad (2.24)$$

El objetivo ahora es encontrar condiciones suficientes sobre las funciones v_1 y v_2 (sobre la V) bajo las cuales las trayectorias generadas por la ecuación χ (ó φ) sean caóticas en el sentido Li-Yorke, es decir, condiciones suficientes para la existencia de un ciclo de período tres. Gráficamente obtiene que para ello la “joroba” de la función χ debe ser muy pronunciada. En términos de las funciones de utilidad (o equivalentemente de las funciones v_1 y v_2) la joroba es más pronunciada cuanto más

alto es el grado de aversión al riesgo de la generación vieja, es decir, cuando el grado de concavidad de la función de utilidad de la generación vieja es muy alto en relación al de la función de utilidad de la generación joven²⁵.

En conclusión, aparte de obtener un criterio para verificar la existencia de un ciclo de período tres, Grandmont proporciona propiedades sobre la función de utilidad para obtener dicho ciclo. En la medida que la obtención de caos está relacionada con la existencia de un θ para el cual la curva de oferta se vuelve suficientemente hacia atrás y que esto se consigue con un valor de R_2 alto, se trata de elegir V_2 (o v_2) de manera que el grado de aversión relativo al riesgo de la generación vieja sea grande.

Las condiciones para la existencia de caos topológico del modelo de Grandmont son muy similares a las del modelo de Benhabib y Day. En ambos modelos es necesario que suceda un cambio en el patrón de consumo para un determinado valor del factor de descuento. Esto implica que la función que genera la dinámica del consumo tenga “joroba” y si ésta es lo suficientemente marcada existe un ciclo de período tres (lo cual se consigue en ambos modelos suponiendo funciones de utilidad con alto grado de concavidad).

Uno de los objetivos de los dos modelos que acabamos de revisar es encontrar la relación entre el modelo OLG convencional (supuestos neoclásicos) y distintos tipos de dinámicas (equilibrio estacionario, ciclos periódicos y caos). En relación al modelo OLG neoclásico, la dinámica es simple y la economía converge de forma monótona al único estado estacionario estable del sistema²⁶. En este modelo inicial el valor de la derivada de la función que genera la dinámica de la economía y que determina su comportamiento es siempre negativo, debido al supuesto de que el efecto sustitución domina al renta. Sin embargo, como muestran los dos modelos

²⁵Como el mismo señala, esto ocurre en particular con funciones de elasticidad constante, donde la generación vieja tiene una función de utilidad que es suficientemente más concava que la de los jóvenes.

²⁶Véanse Romer (1996), capítulo 2, y Barro y Xala-i-Martin (1995), apéndice del capítulo 3.

que acabamos de presentar, si existe un valor del factor de descuento para el cual dicha derivada cambia de signo (domine el efecto renta) el comportamiento dinámico simple desaparece y las trayectorias pueden ser caóticas. De nuevo, la introducción de modificaciones en alguna hipótesis del modelo original altera el comportamiento dinámico drásticamente.

Para terminar, señalar que en la actualidad existen varios trabajos que analizan la obtención de caos en distintas extensiones del modelo OLG (Vilder, 1996; Pintus et al., 2000, Yokoo, 2000). Algunos modelos de OLG actuales introducen lo que Grandmont (1998) denomina *self-fulfilling mistake*: el proceso de aprendizaje de los agentes da lugar a una dinámica de aprendizaje no lineal tan compleja que los errores de los agentes nunca desaparecen (Sorger, 1998; Mólnar y Simonovits (1998), Schönhofer, 1999).

Carrera y Morán (1995) resuelven lo que ellos denominan el *problema inverso* para modelos OLG. Éste consiste en partir de una determinada dinámica y construir el modelo económico capaz de generarla, sin ningún supuesto convencional a priori. La resolución del problema inverso genera cualquier dinámica a partir de una amplia familia de funciones de utilidad, mientras que en el problema directo una única dinámica es generada por una economía concreta. Además, el problema inverso establece condiciones necesarias y suficientes que caracterizan economías capaces de generar una dinámica concreta²⁷.

2.4 Extensiones del Modelo de Goodwin

El modelo de Goodwin (1967) es una aplicación a la economía del modelo presa-depredador de Lotka-Volterra (Lotka, 1925; Volterra, 1931) y trata de explicar de forma endógena los ciclos económicos a partir de la interacción entre salarios, bene-

²⁷Ya hemos visto que Boldrin y Montrucchio (1986) resuelven el problema inverso para modelos de crecimiento óptimo. Sin embargo, su trabajo fue criticado por el valor irrealista (muy bajo) que debía tomar el factor de descuento para generar dinámicas complejas.

ficios y desempleo. Las soluciones del sistema son órbitas periódicas, y, por tanto, cualquier punto inicial está situado en una órbita cíclica (véase Lorenz, 1993). Muchos autores han mostrado un gran interés a la hora de estudiar modificaciones de las hipótesis originales que den lugar a otro tipo de comportamiento dinámico. Dentro de estos trabajos existen algunos que tratan de analizar las condiciones bajo las cuales dicho comportamiento es caótico. Vamos a revisar algunos de ellos.

Entre los primeros trabajos que se ocuparon de esta tarea se encuentra el modelo de Pohjola (1981). Este modelo es una versión discreta del modelo de Goodwin, donde ahora es el nivel de salarios, en vez de su cambio relativo, el que depende positivamente de la tasa de empleo. A continuación analizamos las implicaciones de esta modificación en la naturaleza de las soluciones.

En primer lugar Pohjola reescribe las hipótesis del modelo de Goodwin en tiempo discreto. La oferta de trabajo N_t crece a una tasa constante n :

$$N_{t+1} = (1 + n) N_t, \quad n \geq 0$$

y la productividad del trabajo crece a una tasa constante σ :

$$\frac{Y_{t+1}}{L_{t+1}} = (1 + \sigma) \frac{Y_t}{L_t}$$

El ratio capital-producto es constante:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \mu > 0,$$

La condición de equilibrio del mercado de bienes en tiempo discreto se reescribe:

$$K_{t+1} - K_t = (1 - u_t) Y_t$$

Definimos la tasa de empleo $E_t = \frac{L_t}{N_t}$, y teniendo en cuenta las hipótesis anteriores

resulta:

$$\frac{E_{t+1}}{E_t} = 1 + \frac{(1 - \mu g - u_t)}{\mu(1 + g)} \quad (2.25)$$

donde $g = n + \sigma + \sigma n$, es la tasa natural de crecimiento.

Hasta aquí las hipótesis son las mismas que las del modelo de Goodwin. Sin embargo, siguiendo el trabajo sobre ecuación de salarios de Kuh (1967), Pohjola supone que los salarios, y no su tasa de variación, son un margen sobre la productividad del trabajo. Dicho margen depende de la situación del mercado de trabajo; en concreto supone que depende positivamente de la tasa de empleo:

$$w_t = h(E_t) \frac{Y_t}{L_t} \quad (2.26)$$

donde $h(E_t)$ es una función creciente de E_t para $0 < E_t < 1$. Teniendo en cuenta la participación salarial en el producto $u_t = \frac{w_t L_t}{Y_t}$ y suponiendo $h(E_t) = -\alpha + \beta E_t$ se obtiene la ecuación:

$$u_t = -\alpha + \beta E_t \quad (2.27)$$

El parámetro α refleja el poder de negociación de los capitalistas. Un aumento de α incrementa el margen sobre la productividad del trabajo de manera que, para la misma tasa de empleo, el salario es menor.

Sustituyendo esta ecuación en (2.25) tenemos:

$$\frac{E_{t+1}}{E_t} = 1 + \frac{1}{\mu(1 + g)} [1 - \mu g + \alpha - \beta E_t]$$

que se reduce a:

$$E_{t+1} = E_t \left[1 + r \left(1 - \frac{E_t}{E^*} \right) \right] \quad (2.28)$$

donde $r = \frac{1-\mu g+\alpha}{\mu(1+g)}$ y $E^* = \frac{1-\mu g+\alpha}{\beta}$ es el nivel de empleo de equilibrio (aquel para el cual $E_{t+1} = E_t$). Esta ecuación puede ser reescrita como la logística. Si llamamos $x_t = \frac{rE_t}{(1+r)E^*}$ podemos reescribir (2.28) como:

$$x_{t+1} = (1+r)x_t(1-x_t)$$

Como mostramos en la sección anterior existen valores de los parámetros para los cuales el comportamiento dinámico de esta ecuación es caótico. Pohjola, tomando como referencia el trabajo de May (1976), resume los principales comportamientos dinámicos para distintos valores de r . El comportamiento caótico surge para valores $2.570 < r \leq 3$.

Para analizar la dinámica en términos de los parámetros del modelo supone que $g = 0$. Gráficamente, muestra que la aparición de caos está relacionada con valores suficientemente grandes del poder de negociación, α , y del ratio producto-capital, $\frac{1}{\mu}$. Sin embargo, si $g > 0$ la obtención de ciclos y caos es poco probable, y los valores α y $\frac{1}{\mu}$ necesarios deben ser aún más altos. Relajando los supuestos de que los trabajadores no ahorran y que los capitalistas no consumen se obtienen los mismos resultados.

Los resultados obtenidos para la tasa de empleo son aplicables a la tasa de crecimiento del producto a partir de la ecuación:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{1 + (1 - A_t)}{\mu} = \frac{1 + (1 + \alpha - \beta E_t)}{\mu}$$

La tasa de crecimiento del producto es una función lineal de la tasa de empleo y

el comportamiento dinámico de ambas tasas es el mismo.

Aparte del trabajo de Pohjola, el modelo de Goodwin ha sido generalizado por otros autores para estudiar el impacto de la introducción de nuevas tecnologías y la obtención de caos. En estos trabajos el modelo se desarrolla en tiempo continuo.

El propio Goodwin (1990) estudia los elementos que determinan el crecimiento cíclico del output en un modelo del tipo Lotka-Volterra en tiempo continuo con difusión de innovaciones. Para explicar la naturaleza cíclica del crecimiento integra elementos esenciales de las ideas de Keynes y Schumpeter y formula varios modelos que pretenden explicar la coexistencia de ciclos medios (Juglars) y largos (Kondratiev). Vamos a ver brevemente uno de los modelos que plantea. El modelo viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{v} = -du + fv - ez \quad (2.29)$$

$$\dot{u} = hv \quad (2.30)$$

$$\dot{z} = b + gz(v - z) \quad (2.31)$$

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{(-du + fv - ez)}{(v + v^*)} + mj(1 - sk) \quad (2.32)$$

$$\dot{k} = jk(1 - sk) \quad (2.33)$$

Las dos primeras ecuaciones son una versión simplificada del modelo de Lotka-Volterra para la tasa de empleo y la tasa salarial. La variable k representa la acumulación de capacidad innovadora, que se supone tiene un crecimiento logístico (ecuación (2.33)). La ecuación (2.32) representa la ley de movimiento del output²⁸, q . El parámetro s mide el efecto del crecimiento de la capacidad de innovación en el producto; j es la tasa de crecimiento de la logística; m es el ratio capacidad-

²⁸La ecuación (2.32) se obtiene teniendo en cuenta que:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{v}}{v + v^*} - \frac{\dot{a}_L}{a_L} \quad \text{y} \quad m \frac{\dot{k}}{k} = -\frac{\dot{a}_L}{a_L}$$

producto; v^* es el nivel de empleo de equilibrio (definido como el nivel para el cual el crecimiento del salario es igual al crecimiento de la productividad); d, f, e, h y b son constantes positivas.

La variable z juega el papel de parámetro de control de u y v . Cuando $z = 0$, el sistema produce ciclos inestables. Para solucionar el problema de la inestabilidad se introduce la ecuación (2.31) y se obtiene un sistema dinámico que da lugar al *atractor de Rössler* (Rössler, 1977). Este atractor es uno de los más simples que se conocen en dinámica caótica. A continuación explicamos su significado económico. Cuando el empleo y el producto aumentan (disminuyen) por encima (debajo) de un determinado nivel se pone en movimiento el crecimiento de una variable, parámetro de control z , que progresivamente inhibe la expansión (disminución) del producto y el empleo, estabilizando el sistema. Dentro del atractor la dinámica del sistema es muy diversa, desde ligeramente irregular hasta caótica. Sin embargo el sistema es dinámicamente estable: si se está inicialmente fuera del atractor se acaba dentro, y si inicialmente se está dentro, nunca se sale. El comportamiento dinámico dentro del atractor parece reflejar las irregularidades que se observan en la series económicas y muchos autores lo consideran el atractor más comprensible y aplicable a la economía.

Mediante simulaciones numéricas y para distintos valores de los parámetros se obtienen distintos grados de irregularidad. Para analizarla se construye el diagrama de fases y las series temporales de u y v . Para ciertos valores de los parámetros la dinámica que se observa en el diagrama de fases es caótica, lo que produce un crecimiento en el producto aun más irregular. Dicha irregularidad es resultado de: a) cómo la aparición de innovaciones afecta al nivel de empleo en dos sentidos opuestos (por un lado, aumentando el producto se eleva el empleo y por otro, el cambio tecnológico disminuye el empleo por unidad de producto al elevar su productividad) y b) del papel estabilizador del parámetro de control.

Aparte de los modelos de difusión de innovaciones propuestos por Goodwin, se

han desarrollado una serie de trabajos dentro de lo que se ha denominado “economía evolutiva” que, partiendo de distintas modificaciones del modelo Lotka-Volterra, construyen modelos de crecimiento e innovaciones con dinámicas caóticas. La economía evolutiva considera que la evolución de los sistema económicos es similar a la de los procesos biológicos. Así, estudian el impacto de la introducción de nuevas tecnologías identificando éstas con la aparición de una nueva especie. Empleando conceptos biológicos, analizan los procesos de difusión, selección, adaptación e implementación de nuevas tecnologías en la industria. Los principales trabajos tienen como referencia los modelos de Goodwin (1967) y Silverberg (1984). Vamos a presentar uno de ellos.

Silverberg y Lehnert (1996) analizan el comportamiento dinámico del sistema cuando las nuevas tecnologías son generadas por un proceso aleatorio de Poisson, y demuestran que el modelo tiene las características suficientes para obtener caos. En la economía coexisten un grupo de distintas tecnologías (coeficientes fijos lineales), y cada una de ellas produce un bien de capital. El modelo que proponen es el siguiente:

$$\dot{w} = -mw + n w v \quad (2.34)$$

$$\frac{\dot{v}_i}{v_i} = \frac{\dot{k}_i}{k_i} - \alpha = \frac{1}{c_i} \left(1 - \frac{w}{a_i} \right) + s(r_i - \bar{r}) - \beta \quad (2.35)$$

donde m y n son constantes positivas, w es el salario real, v la tasa de empleo, k el stock de capital, r la tasa de beneficios, a la productividad del trabajo, c el ratio capital-producto, \bar{r} la tasa media de beneficios, α es la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, γ la tasa exponencial de depreciación del capital físico y $\beta = \alpha + \gamma$. El subíndice i denota la tecnología y la ausencia de subíndices se refiere al nivel agregado. Se supone que la aparición de una nueva técnica sigue un proceso aleatorio de Poisson. Cada nueva técnica incrementa en una proporción fija la productividad

del trabajo a . Se considera que la nueva técnica no reemplaza inmediatamente a las anteriores sino que distintas tecnologías pueden coexistir durante largos períodos de tiempo. Además es necesario un proceso de difusión de la nueva tecnología antes de que ésta aumente la productividad del trabajo.

Mediante simulaciones obtienen las series temporales de las variables del modelo y analizan sus propiedades. Para ello utilizan una serie herramientas numéricas de detección de caos (exponentes de Lyapunov, dimensión de correlación Grassberger-Procaccia, estadístico Brock-Dechert-Scheinkman) y obtienen que las series pueden ser caóticas²⁹.

En conclusión, comparando los resultados dinámicos del modelo de Goodwin original (órbitas cerradas) con los modelos revisados en esta sección, de nuevo observamos que la introducción de ciertas modificaciones altera el comportamiento dinámico del sistema original. Hemos visto cómo en el modelo de Pohjola el hecho de introducir una curva de Phillips donde el nivel de salarios (no su cambio relativo como hace Goodwin) depende positivamente de la tasa de empleo, y el suponer tiempo discreto en vez de continuo, cambia la estructura del modelo original y da lugar a una ecuación en diferencias no lineal capaz de generar trayectorias caóticas. En los modelos desarrollados en tiempo continuo, los elementos que alteran la dinámica original del modelo de Goodwin y dan lugar a la aparición de dinámicas caóticas son, por un lado, la aparición de innovaciones y los efectos opuestos que provocan en la tasa de empleo, y por otro la introducción de ciertos elementos estabilizadores del sistema.

2.5 Crecimiento Endógeno

Aunque los primeros trabajos dedicados al estudio de la obtención de dinámicas complejas se desarrollan en modelos de crecimiento exógeno, a mediados de los 90

²⁹El tipo de caos analizado con estas herramientas numéricas se denomina caos de baja dimensión (low-dimensional chaos).

comienzan a aparecer trabajos que realizan dicho estudio en modelos de crecimiento endógeno. Vamos a revisar dos de ellos, el de Deissenberg y Nyssen (1998) y el de Boldrin, Nishimura, Shigota y Yano (2000).

Deysenberg y Nyssen parten de una economía en la que existen dos tipos de agentes. El primero lo forman un continuo de empresas, identificadas con el subíndice $i, i \in [0, 1]$. Cada empresa ofrece un bien diferente a un precio igual al coste marginal. La empresa tiene la posibilidad de invertir, que en este caso, consiste en utilizar recursos productivos para obtener una innovación tecnológica que reduce el coste de producción en una proporción λ . Una firma que invierte en t disfruta de una situación monopolista en $t + 1$, que le permite vender su producto a un precio igual a su coste marginal antes de llevar a cabo la inversión. Finalizado este período, los beneficios de la innovación pasan a manos de los consumidores y el precio de venta se reduce en el siguiente período. El rendimiento neto de la inversión viene dado por:

$$R_t^f = \frac{(1 - \lambda) L}{F (1 - n_t + \lambda n_t)}$$

que no es otra cosa que la función inversa de demanda de recursos para invertir. L es la oferta de recursos, F es la cantidad de recursos que invierte cada empresa y n_t es el número de empresas que invierten en t . Sobre n_t se añaden dos restricciones, una de no negatividad, $n_t \geq 0$, y una restricción de capacidad, $n_t \leq 1$.

El segundo tipo de agentes lo forman un número arbitrario de hogares idénticos que resuelven, con un horizonte temporal de dos períodos, un problema de maximización que puede descomponerse en dos. Un problema estático que consiste en la decisión óptima de cómo repartir sus gastos entre los distintos bienes dentro de un mismo período y un problema dinámico, que consiste en la decisión óptima temporal entre ahorro y consumo. Considerando que el gasto entre los distintos bienes se reparte uniformemente, se resuelve el problema de optimización temporal entre

ahorro y consumo, del que obtenemos la oferta inversa de recursos de inversión:

$$R_t^m = \frac{1}{\delta} \frac{u_{t+1}}{u_t} = \frac{1}{\delta} \frac{L(1 - n_{t-1} + \lambda n_{t-1})}{(L - n_t F)(1 - n_t + \lambda n_t) \lambda^{n_{t-1}}} \quad (2.36)$$

donde δ es la tasa de descuento temporal, y u_t y u_{t+1} son las funciones de utilidad instantáneas en t y $t + 1$.

Igualando oferta y demanda de recursos para invertir y teniendo en cuenta las restricciones de capacidad y no negatividad, obtenemos una ecuación de movimiento para el número de empresas que invierten en un determinado período t , n_t , como función del número de empresas que invirtieron en el período anterior, n_{t-1} :

$$n_t = \max [0, \min [1, \phi(n_{t-1})]] \equiv \Phi(n_{t-1}) \quad (2.37)$$

donde:

$$\phi(n_{t-1}) = \frac{L}{F} - \frac{1}{\delta} \frac{1 - n_{t-1} + \lambda n_{t-1}}{\lambda^{n_{t-1}} - \lambda^{1+n_{t-1}}}$$

A partir de la ecuación (2.37) se lleva a cabo el análisis dinámico del modelo. En primer lugar, se analiza la posible forma de la función ϕ , y obtienen que (teniendo en cuenta las restricciones de capacidad y no negatividad) en general, esta será como la representada³⁰ en la figura 2.6.

La forma de esta curva es resultado de la interacción de las decisiones de ahorro e inversión de los hogares y empresas. Un aumento de n_{t-1} no afecta a R_t^f , pero afecta a R_t^m a través de dos efectos opuestos. Por un lado, un efecto renta por el cual, un aumento de n_{t-1} afecta positivamente a la utilidad en t de las familias al aumentar los beneficios de la innovación, lo que provoca una disminución de R_t^m (véase la ecuación (2.36)). Por otro, un efecto precio que provoca un aumento de

³⁰En concreto, demuestran que tiene esta forma para $\lambda > 0.21$.

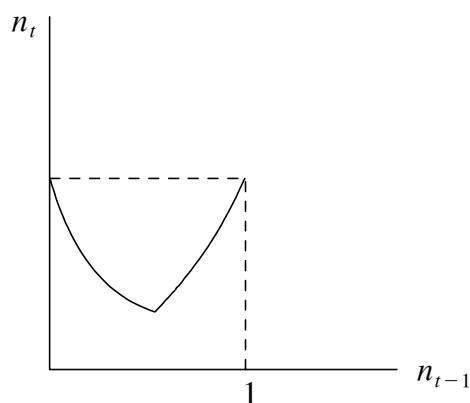


Figura 2.6.

R_t^m , en la medida que un aumento de la inversión en $t - 1$ provoca una disminución del precio en $t + 1$ y en consecuencia un aumento de la utilidad en $t + 1$.

En la medida que R_t^f no depende de n_{t-1} y es creciente en n_t , demuestran que $\phi'(n_{t-1}) < 0$ si el efecto renta domina al precio y $\phi'(n_{t-1}) > 0$ si el efecto precio es el que domina. Este cambio en el patrón de inversión es uno de los factores que determinan la aparición de dinámicas complejas.

A continuación se analiza la existencia de valores de los parámetros para la aparición de un ciclo de período tres, es decir, de caos topológico. La complejidad del modelo hace imposible calcularlos analíticamente. Por esta razón, realizan simulaciones numéricas para observar el rango de valores para los cuales se obtienen dinámicas caóticas. Demuestran que la aparición de caos está relacionada con los valores que tomen $\frac{L}{F}$, λ y δ . Así, estos parámetros y combinaciones de ellos pueden ser interpretados como parámetros de bifurcación. Los autores sólo contemplan el caso de variaciones exógenas de $\frac{L}{F}$ y demuestran que para valores pequeños del factor de descuento δ , el sistema dinámico presenta un comportamiento caótico³¹.

³¹La necesidad de valores del factor descuento pequeños para la obtención de caos era un resultado común a los modelos de crecimiento exógeno que revisamos en la primera epígrafe. Este resultado se debía al tipo de funciones de utilidad y producción que se consideraban. Como señalan los propios autores, considerando otro tipo de función de utilidad los valores de δ necesarios para la aparición de caos son más realistas.

Los autores muestran que la aparición de dinámicas caóticas no está relacionada ni con la exogeneidad o endogeneidad de los factores que determinan el crecimiento económico, ni con el cumplimiento de las restricciones de capacidad y no negatividad. La aparición de comportamientos complejos resulta de la interacción de demandantes y oferentes de recursos de inversión y la imperfección del mercado asociada. En concreto, es necesario el cambio en el patrón de inversión, es decir, que las empresas encuentren rentable en cada período dedicar una mayor cantidad de recursos a invertir o a producir bien de consumo (como obtuvimos en los modelos OLG este resultado depende del conflicto de los efectos renta y precio).

Boldrin, Nishimura, Shigoka, y Yano (2000) construyen un modelo de crecimiento endógeno con dos sectores donde introducen un efecto externo positivo en la producción de uno de ellos. Mediante varios ejemplos numéricos demuestran la existencia de caos topológico y ergódico. La externalidad positiva esta es la misma línea que la desarrollada en los modelos de “aprendizaje por la práctica” (Arrow, 1962; Romer, 1986).

Existen dos bienes, de consumo y de inversión, producidos en sectores diferentes. El comportamiento del agente representativo viene descrito por el siguiente problema de optimización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MAX.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t) \\ \text{sujeto a:} \\ c_t = e^{\bar{\eta}} K_{1t}^{\bar{\alpha}} L^{1-\bar{\alpha}} \quad 0 < \bar{\alpha} < 1, \bar{\eta} > 0 \\ I_t = bK_{2t} \\ K_t^1 + K_t^2 \leq k_t \\ k_{t+1} = I_t + (1 - \mu) k_t \quad 0 < \mu \leq 1 \\ k(0) = \bar{k} \end{array} \right.$$

La primera restricción es la función de producción de bien de consumo y e_t es la externalidad del sector. Se supone que el nivel de externalidad es igual a la cantidad total de capital empleada en los dos sectores k_t . La dotación de trabajo es fija $L = 1$ y sólo se emplea en el sector de bien de consumo. La segunda restricción es la función de producción del bien de inversión y la cuarta ecuación la acumulación de capital donde μ es la tasa de depreciación del bien de capital. Se supone que $u(c) = c^{1-\sigma}$ y $0 < \sigma < 1$.

Definen $\theta = b + 1 - \mu$, y suponen $\theta > 1$, lo cual es necesario para que exista crecimiento a largo plazo.

A continuación calculan y caracterizan el equilibrio dinámico y a partir de las condiciones de optimalidad habituales llegan a una ecuación en diferencias:

$$z_{t+1} = f(z_t) = (\delta\theta)^{\frac{1}{1-\alpha}} z_t (\theta - z_t)^\beta \quad (2.38)$$

donde $z_t = \theta - \frac{k_{t+1}}{k_t}$, $\beta = \frac{\eta}{1-\alpha} - 1$ y $\beta \geq 0$. Para $\beta > 0$, la función f es unimodal y satisface $f(0) = f(\theta) = 0$ y este es el caso que se estudia.

En primer lugar demuestran mediante ejemplos numéricos la existencia de caos topológico. Manteniendo fijos los valores de los parámetros $(\alpha, \beta, \delta) = (0.5, 5, 0.6)$ muestran que existen valores del parámetro θ para los cuales el sistema dinámico (2.38) es topologicamente caótico y los mismo cumple el stock de capital de equilibrio definido como:

$$k_{t+1} = (\theta - z_t) k_t$$

A continuación demuestran la existencia de caos ergódico utilizando el método de la derivada Schwartziana que presentamos en la primera parte del trabajo. Mediante simulaciones numéricas muestran valores del parámetro θ para los cuales el sistema genera sendas de equilibrio que son ergódicamente caóticas.

Por último demuestran que el caos ergódico es robusto en el sentido de la teoría de la medida que presentamos también la primera parte. Muestran que el conjunto de condiciones iniciales que da lugar a trayectorias caóticas tiene medida ergódica positiva absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue); de manera que el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias caóticas es observable.

El modelo predice que cuando el efecto externo es muy fuerte, la tasa de crecimiento podría oscilar para siempre a lo largo de ciclos periódicos e incluso trayectorias caóticas.

Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo ha sido mostrar cómo la introducción de no linealidades permite explicar de forma endógena el comportamiento irregular característico de las variables económicas. Como señalamos en la introducción, a pesar de ser un hecho estilizado de la economía el comportamiento irregular de las variables económicas, los trabajos de crecimiento tradicionales, en general, no se han ocupado de estudiar las fluctuaciones irregulares, limitándose al estudio de la tendencia de crecimiento sostenido. El resultado fundamental que se desprende del presente trabajo es que la introducción de ciertas no linealidades en algunas relaciones de las variables económicas de los modelos de crecimiento originales altera el comportamiento dinámico drásticamente. En concreto la dinámica interna del sistema puede ser muy compleja, incluso caótica, reflejando de una forma mas precisa la tipología de comportamientos observados en la realidad, sin necesidad de introducir shocks exógenos. Por tanto, los modelos son capaces de explicar de forma endógena los ciclos y el crecimiento económico.

En los modelos de crecimiento óptimo exógeno y endógeno la complejidad del comportamiento dinámico viene dada por la dinámica no lineal del patrón de inversión para ciertos valores del factor de descuento. En concreto, el tipo de comportamiento dinámico depende del hecho de que la economía encuentre rentable producir bienes de consumo o producir bienes de capital. Esta rentabilidad viene dada por el factor de descuento. Para valores pequeños de éste, la dinámica de inversión es generada por una función unimodal, y puede aparecer caos. No obstante, se demuestra que el sistema es capaz de generar trayectorias caóticas, para cualquier valor del parámetro de descuento intertemporal, cuando se relajan los supuestos neoclásicos realizados sobre las funciones de producción y de utilidad y el tipo de mercado (competencia perfecta). En los modelos de generaciones sucesivas la aparición de dinámicas complejas está relacionada con la dinámica no lineal del

consumo y con el valor que toma el factor de descuento. En concreto, es necesario un cambio de patrón en el consumo para un valor determinado del factor de descuento; es decir, que existan valores del factor de descuento para los cuales el efecto sustitución intertemporal domine al renta, pero que a partir de un determinado valor sea el efecto renta intertemporal el que domine, de manera que la función que genera la dinámica del consumo sea unimodal. Los elementos que dan lugar a la aparición de dinámicas complejas en el modelo de Goodwin son diversos. Por un lado, la introducción de una ecuación de salarios en lugar de una curva de Phillips y la extensión a tiempo discreto dan lugar a un comportamiento de tipo logística en la evolución de la tasa de empleo, capaz de generar trayectorias caóticas. En los trabajos más recientes, la acumulación de innovaciones de tipo logístico, los efectos opuestos que dicha acumulación provoca en la tasa de empleo, y la introducción de ciertos elementos estabilizadores del sistema pueden ser fuente de comportamientos caóticos.

En conclusión la presencia de no linealidades dentro de estos modelos permite mostrar la naturaleza irregular y compleja de los fenómenos económicos considerados (inversión, producción, empleo, etc.) sin necesidad de introducir shocks exógenos. Por tanto, pensamos que la aplicación de los sistemas dinámicos no lineales en el ámbito de la economía dinámica constituye una vía a seguir, en la medida que pueda enriquecer y completar los trabajos que tratan de explicar el origen y la naturaleza de las fluctuaciones, y en concreto, aquellos que defienden la endogeneidad de dicha naturaleza.

Bibliografía

- Arrow, K. J. (1962), The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies* 29, (Junio), 155-173.
- Asea, P.K. y Zak, P.J. (1999), Time-to-build and cycles, *Journal of Economics Dynamics and Control* 23, 1155-1175.
- Barro, R. J. y Sala-i-Martin, X. (1995), *Economic Growth*. McGraw-Hill.
- Benhabib, J. y Day, R. (1982), A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model, *Journal of Economics Dynamics and Control* 4, 37-55.
- Benhabib, J. y Nishimura, K. (1985), Competitive equilibrium cycles, *Journal of Economic Theory* 35, 284-306.
- Birkhoff, A.D. (1936), Proof of the ergodic theorem, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 17, 656-660.
- Böhm, V. y Kaas, L. (2000), Differential savings, factor shares, and endogenous growth cycles, *Journal of Economics Dynamics and Control* 24, 965-980.
- Boldrin, M. (1986), Paths of Optimal accumulation in two-sector models, en W. Barnett, J. Geweke, y K. Shell. (eds), *Chaos, sunspot, bubbles and nonlinearity*. Cambridge University Press.
- Boldrin, M. y Deneckere, R. (1987), Simple macroeconomics models with a very complicated behavior. *UCLA Economics Working Papers* 527, *UCLA Department of Economics*,
- Boldrin, M. y Montrucchio, L. (1986), On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths, *Journal of Economic Theory* 40, 26-39.
- Boldrin, M. y Montrucchio, L. (1989), *Dynamic complexities of intertemporal competitive equilibria*. Oxford University Press.
- Boldrin, M., Nishimura, K., Shigoka, T. y Yano, M. (2000), Chaotic Equilibrium Dynamics in Endogenous Growth Models, *Journal of Economic Theory* 96, 97-132.
- Brock, W. A., Dechert, W. D. y Sheinkman, J. A. (1991), A Test for Independence

- based on the Correlation Dimension, *Mimeo. University of Wisconsin*.
- Carrera, C. y Moran, M. (1995), General dynamics in overlapping generations models, *Journal of Economics Dynamics and Control* 19, 813-830.
- Cass, D.(1965), Optimum Growth in a Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economics Studies* 32, (July), 233-240.
- Collet, P. y Eckman, J.P, (1981), *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Basel-Boston: Birkhaeuser.
- Day, R.H, (1982), Irregular growth cycles, *American Economic Review* 72, 406-14.
- Deissenberg, C. y Nyssen, J. (1998), A simple model of Schumpeterian growth with complex dynamics, *Journal of Economics Dynamics and Control* 22, 247-266.
- Deneckere, R. y Pelikan, S. (1986), Competitive chaos, *Journal of Economic Theory* 40, 13-25.
- Farmer, R. (1986), Deficits and cycles, *Journal of Economic Theory* 40, 77-88.
- Gale, D. (1973), Pure exchange equilibrium of dynamics economic model, *Journal of Economic Theory* 6, 12-36.
- Goodwin, R. M. (1967), A Growth Cycle, en C.H. Feinstein (ed), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge University Press.
- Goodwin, R.M. (1990), *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendon Press Oxford.
- Goodwin, R.M. y Pacini, P.M. (1992), Nonlinear Dynamics and Chaos: An Introduction, en Vercelli, A. y Dimitri, N. (eds), *Macroeconomics: A Survey of Research Strategies*. Oxford University Press.
- Grandmont, J.M. (1985), On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica* 53, 995-1045.
- Grandmont, J.M. (1998), Expectations Formations and Stability of Large Socioeconomic Systems, *Econometrica* 66, 741-782.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983), Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica 9 D*, 189-208.

- Hek, P.A. (1998), An aggregative model of capital accumulation with leisure-dependent utility, *Journal of Economics Dynamics and Control* 23, 255-276.
- Jakobson, M. V. (1981), Absolutely Continuous Invariant Measures of One-Parameter Families of One-Dimensional Maps, *Communications in Mathematical Physics* 81, 39-88.
- Kaldor, N. (1940), A model of the Trade Cycle, *Economic Journal* 50, 78-92.
- Kalra, S. (1996), Cyclical equilibria in multi-sector productive economies: The role of substitution and factor intensity, *Journal of Economics Dynamics and Control* 20, 1709-1729.
- Koopmans, T. C. (1965), On the Concept of Optimal Economic Growth, en *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North Holland.
- Kuh, E. (1967), A Productivity Theory of Wage Levels - an Alternative to the Phillips Curve, *Review of Economic Studies* 34, 333-360.
- Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1975), Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly* 82, 271-271.
- Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1978), Ergodic Transformations form an Interval into Itself, *Transactions of the American Mathematical Society* 235, 183-192.
- Lorenz, H-W. (1993), *Nonlinear Dynamics Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag.
- Lotka, A.Y. (1925), *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Willians and Wilkens.
- Lyapunov, A.M. (1949), Problème Général de la Stabilité du Mouvement, *Annals of Mathematical Studies* 17. Princenton: Princenton University Press.
- Majumdar, M. y Mitra, T. (1994), Robust Ergodic Chaos in Discounted Dynamic Optimization Models, *Economic Theory* 4, 677-688.
- May, R.M. (1976), Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, *Nature* 261, 459-467.
- May, R.M. y Oster, G.F. (1976), Bifurcations and dynamic complexity in simple

- ecologicals models, *American Naturalist* 110, 573-599.
- McKenzie, L.W. (1976), Turnpike theory, *Econometrica* 44, 841-855.
- Mitra, T. (1996), An Exact Discount Factor Restriction for Period-Three in Dynamic Optimization Models, *Journal of Economic Theory* 69, 281-305.
- Mólnar, G. y Simonovits, A. (1998), Expectations, (in)stability and (in)viability in realistic overlapping cohorts models, *Journal of Economics Dynamics and Control* 23, 303-332.
- Montrucchio, L. (1987), Dynamical systems that solve continuous time infinite horizon optimization problems: Anything goes, *Mimeo, october (Politecnico di Torino, Turin)*.
- Montrucchio, L. (1994), Dynamics Complexity of Optimal Paths and Discount Factor for Strongly Concave Problems, *Journal of Optimization and Applications* 80, 385-406.
- Montrucchio, L. y Sorger, G. (1996), Topological entropy of policy functions in concave dynamic optimization models, *Journal of Math. Economics* 25, 181-194.
- Nishimura, K., Sorger, G. y Yano, M. (1994), Ergodic chaos in optimal growth models with low discount rates, *Economic Theory* 4, 705-717.
- Nishimura, K. y Yano, M. (1995), Nonlinear Dynamics an Chaos in Optimal Growth: An Example, *Econometrica* 63, 981-1001.
- Nishimura, K. y Yano, M. (1996), On the Least Upper Bound of Discount Factors Are Compatible with Optimal Period-Three Cycles, *Journal of Economic Theory* 69, 306-333.
- Pintus, P., Sands, D. y Vilder de, R. (2000), On the transition from local regular to global irregular fluctuations, *Journal of Economics Dynamics and Control* 24, 247-272.
- Prskawetz, A. y Feichtinger, G. (1995), Endogenous population Growth May Imply Chaos, *Journal of Population Economics* 8, 59-80.

- Pohjola, M.J. (1981), Stable and Chaotic Growth: the Dynamics of a Discrete Version of Goodwin's Growth Cycle Model, *Zeitschrift für Nationalökonomie* 41, 27-38.
- Ramsey, F. (1928), A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal* 38, (December), 543-559.
- Reichlin, P. (1986), Equilibrium cycles in a overlapping generations economy with production, *Journal of Economic Theory* 40, 89-102.
- Rockafellar, T.R. (1976), Saddle points of Hamiltonian systems in convex Lagrange problems having a non-zero discount rate, *Journal of Economic Theory* 12, 71-113.
- Romer, D. (1996), *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill.
- Romer, P. (1986), Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy* 94, 5, (October), 1002-1037.
- Rössler, O. E. (1977), Continuous Chaos, en H. Haken (ed), *Synergetics. A Workshop*. Springer-Verlag.
- Ruelle, D (1978) *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley.
- Samuelson, P. A. (1958), An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy* 66, 6, (December), 467-482.
- Sarkovskii, A. N. (1964), Coexistence of Cycles of a Continuous Map on Line into Itself, *Ukrainichkii Matematicheskii Zhurnal* 16, 61-71.
- Scheinkman, J.A. (1976) On optimal steady state of n -sector growth models when utility is discounted, *Journal of Economic Theory* 12, 11-30.
- Schönhofer, M. (1999), Chaotic Learning Equilibria, *Journal of Economic Theory* 89, 1-20.
- Shannon, C.E. (1948), A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.* 27, 379-423; 623-656.
- Silverberg, G. (1984), Embodied Technical Progress in a Dynamic Economic Model: The Self-Organization Paradigm, en R. Goodwin, M. Krüger, y A. Vercelli (eds),

Nonlinear Models of Fluctuations Growth. Springer Verlag.

Silverberg, G. y Lehnert, D. (1996), Evolutionary chaos: Growth fluctuations in a Schumpeterian model of creative destruction, *en* W. Barnett, A.P. Kirman y M. Salmon (eds), *Nonlinear Dynamics and Economics*. Cambridge University Press.

Singer, D. (1978), Stable Orbits and Bifurcation of Maps of the Interval, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 35, 260-267.

Solow, R. M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 70, 1 (February), 65-94.

Sorger, G. (1998), Imperfect foresight and chaos: an example of a self-fulfilling mistake, *Journal of Economic Behavior and Organization* 33, 363-383.

Takens, F. (1981), Detecting Strange Attractors in Turbulence, *en* D. Rand y L. Young (eds), *Dynamical Systems and Turbulence*. Springer-Verlag.

Ulam, S. y von Neumann, J. (1947), On combinations of stochastic and deterministic processes, *Bulletin Am. Mathematical Society* 53, 1120.

Vilder de, R. (1996), Complicated Endogenous Business Cycles under Gross Substitutability, *Journal of Economic Theory* 71, 416-442.

Volterra, V. (1931), *Lecons sur la Theorie Mathematique de Lutte pour la Vie*. Paris: Gauthier-Villars.

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. y Vastano, J. A. (1985), Determining Lyapunov Exponents From a Time Series, *Physica* 16 D, 285-317.

Woodford, M. (1988), Imperfect financial intermediation and complex dynamics, *en* W. Barnett, J. Geweke y K. Shell (eds), *Chaos, sunspot, bubbles and nonlinearity*. Cambridge University Press.

Yokoo, M. (2000), Chaotic dynamics in a two-dimensional overlapping generations model, *Journal of Economics Dynamics and Control* 24, 904-934.

Zhang, J. (2000), Public services, increasing returns, and equilibrium dynamics, *Journal of Economics Dynamics and Control* 24, 227-246.